

ROBÓTICA — SEGUNDA CONVOCATORIA

(SEPTIEMBRE 2018)

Grado en Ingeniería de Tecnologías
Industriales
Universidad de Sevilla | 12 de Septiembre de
2018

Resolución Oficial Detallada: Cuestión 1 (Cinemática Robot Espacial R-R-P)

TIEMPO TOTAL: 2H 00M | CALIFICACIÓN
CUESTIÓN: 3.5 PUNTOS

ENUNCIADO OFICIAL (CUESTIÓN 1 — 3.5 PUNTOS)

Considere el robot manipulador de la figura con 3 articulaciones (2 de rotación y 1 prismática). La longitud del primer enlace es L_1 y la del segundo es L_2 . El eje de la articulación 2 es perpendicular al eje que une la articulación 1 y la 2.

Se pide:

- (1.25 puntos).** Obtener los parámetros de Denavit-Hartenberg (es necesario entregar un esquema que represente claramente los sistemas de referencia elegidos).
- (1.25 puntos).** Obtener las posiciones del efector final en función de las variables articulares.
- (1.0 punto).** Obtener el modelo que permite calcular las variables articulares dada una posición deseada del efector final (Cinemática Inversa - PCI).

ROBOT R-R-P 3 GDL (SEPTIEMBRE 2018 - CUESTIÓN 1)

Asignación de Sistemas de Referencia Denavit-Hartenberg

TABLA DE PARÁMETROS DH:

Art i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	L_1	$+90^\circ$
2	q_2	0	0	$+90^\circ$
3	0°	L_2+q_3	0	0°

Cinemática Directa:

$$\begin{aligned}x &= (L_1 + (L_2+d_3)\cos(q_2)) \cdot \cos(q_1) \\y &= (L_1 + (L_2+d_3)\cos(q_2)) \cdot \sin(q_1) \\z &= (L_2+d_3) \cdot \sin(q_2)\end{aligned}$$

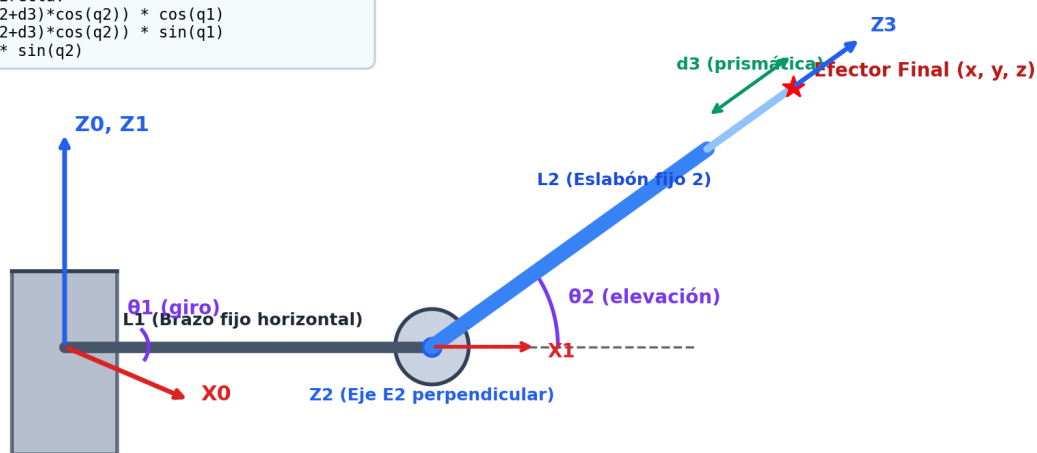


Figura 1: Esquema cinemático tridimensional del robot R-R-P (polar/esférico) con asignación de ejes Denavit-Hartenberg.

1. ASIGNACIÓN RIGUROSA DE EJES DENAVIT-HARTENBERG (1.25 PUNTOS)

1.1. Justificación Geométrica de los Sistemas de Coordenadas

- Sistema Base $\{0\}$:** Se sitúa el origen O_0 en la intersección del eje de giro de la primera articulación con el plano base. El eje Z_0 se coloca colineal con el eje de rotación de la articulación 1 (vertical hacia arriba). El eje X_0 se orienta en la dirección del brazo horizontal L_1 cuando $q_1 = 0$. El eje Y_0 se define completando una terna dextrógira ($X_0 \times Y_0 = Z_0$).

- **Sistema {1} (Articulación 2):** El eje de giro de la articulación 2 (E_2) es horizontal y perpendicular a la línea que une la articulación 1 con la 2. Por tanto, se asigna Z_1 **colineal con el eje de giro E_2** . El origen O_1 se sitúa en la articulación 2. La normal común entre Z_0 (vertical) y Z_1 (horizontal perpendicular a L_1) es la recta que contiene al brazo horizontal L_1 . Por convenio DH, se define X_1 **a lo largo de dicha normal común, dirigido de Z_0 a Z_1** .
- **Sistema {2} (Eslabón 2 / Elevación):** La articulación 3 es prismática y se desliza a lo largo del segundo brazo (inclinado un ángulo q_2). Por el algoritmo de Denavit-Hartenberg, Z_2 **debe situarse a lo largo del eje de traslación de la articulación prismática 3** (eje colineal con el brazo 2). Como Z_1 y Z_2 se cortan en la articulación 2, su distancia es $a_2 = 0$, y el origen O_2 coincide con O_1 . El eje X_2 se elige perpendicular al plano formado por Z_1 y Z_2 ($X_2 = Z_1 \times Z_2$).
- **Sistema {3} (Efector Final):** Se coloca el origen O_3 en el extremo del vástago extensible, con Z_3 colineal con Z_2 y X_3 paralelo a X_2 . El desplazamiento a lo largo de Z_2 es la suma del tramo fijo L_2 más la carrera prismática d_3 ($d_3^* = L_2 + d_3$).

1.2. Tabla de Parámetros de Denavit-Hartenberg

Eslabón i	θ_i (giro en Z_{i-1})	d_i (desplazamiento en Z_{i-1})	a_i (distancia en X_i)	α_i (torsión en X_i)
1	q_1 (variable)	0	L_1	$+90^\circ$
2	q_2 (variable)	0	0	$+90^\circ$
3	0°	$L_2 + d_3$ (variable)	0	0°

2. CINEMÁTICA DIRECTA DE POSICIÓN (1.25 PUNTOS)

2.1. Matrices de Transformación Homogénea A_i

Aplicando la fórmula canónica de Denavit-Hartenberg proporcionada en el examen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & L_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & L_1 \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Matriz Total de Transformación $T_0^3 = A_1 A_2 A_3$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & \sin q_1 & \cos q_1 \sin q_2 & (L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2) \cos q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 & \sin q_1 \sin q_2 & (L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2) \sin q_1 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & (L_2 + d_3) \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posición Cartesiana del Eector Final:

$$x(q_1, q_2, d_3) = [L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2] \cos q_1$$

$$y(q_1, q_2, d_3) = [L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2] \sin q_1$$

$$z(q_1, q_2, d_3) = (L_2 + d_3) \sin q_2$$

2.3. Jacobiano y Determinante

Derivando respecto a las coordenadas articulares $[q_1, q_2, d_3]^T$:

$$J = \begin{bmatrix} -(L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2) \sin q_1 & -(L_2 + d_3) \sin q_2 \cos q_1 & \cos q_2 \cos q_1 \\ (L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2) \cos q_1 & -(L_2 + d_3) \sin q_2 \sin q_1 & \cos q_2 \sin q_1 \\ 0 & (L_2 + d_3) \cos q_2 & \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = -(L_2 + d_3) \cdot [L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2]$$

Singularidades Físicas: 1) $L_2 + d_3 = 0$: Brazo telescópico retraído al centro de la articulación 2.

2) $L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2 = 0$: El efector final cruza la línea vertical del eje base Z_0 (pérdida de grado de libertad acimutal).

3. CINEMÁTICA INVERSA ANALÍTICA (PCI) (1.0 PUNTO)

Objetivo: Dadas las coordenadas deseadas del efector final (x_d, y_d, z_d) , despejar de forma unívoca y en forma cerrada las variables articulares (q_1, q_2, d_3) .

1. Cálculo de q_1 (Acimut)

Dividiendo las ecuaciones de y y x :

$$\frac{y_d}{x_d} = \frac{[L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2] \sin q_1}{[L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2] \cos q_1} = \tan q_1$$

$$q_1 = \text{atan2}(y_d, x_d)$$

(Existe una solución dorsal alternativa: $q_1' = q_1 \pm \pi$).

2. Distancia Radial en el Plano Horizontal

Definiendo el radio horizontal R_{xy} :

$$R_{xy} = \sqrt{x_d^2 + y_d^2} = L_1 + (L_2 + d_3) \cos q_2$$

$$(L_2 + d_3) \cos q_2 = R_{xy} - L_1 = \sqrt{x_d^2 + y_d^2} - L_1$$

3. Cálculo de q_2 (Elevación / Pitch)

Tomando el cociente entre z_d y la proyección horizontal:

$$\frac{z_d}{R_{xy} - L_1} = \frac{(L_2 + d_3) \sin q_2}{(L_2 + d_3) \cos q_2} = \tan q_2$$

$$q_2 = \text{atan2} \left(z_d, \sqrt{x_d^2 + y_d^2} - L_1 \right)$$

4. Carrera Prismática d_3

Elevando al cuadrado y sumando por Pitágoras:

$$(L_2 + d_3)^2 = \left(\sqrt{x_d^2 + y_d^2} - L_1 \right)^2 + z_d^2$$

$$d_3 = \sqrt{\left(\sqrt{x_d^2 + y_d^2} - L_1 \right)^2 + z_d^2} - L_2$$

Condición de existencia física: $d_3 \geq 0 \iff \left(\sqrt{x_d^2 + y_d^2} - L_1 \right)^2 + z_d^2 \geq L_2^2$ (el punto deseado debe estar fuera de la esfera ciega de radio L_2 centrada en la articulación 2).

4. RESOLUCIÓN DE CUESTIONES ADICIONALES DEL EXAMEN

Cuestión 2 (1.5 Puntos): Sensores de Navegación Móvil

Método	C1: Resolución	C2: Frecuencia de Medida	C3: Coste
M1: Odometría con Encoders	Muy alta localmente (< 1 mm), con deriva acumulada por deslizamiento.	Muy alta (100 Hz - 1 kHz).	Muy bajo (integrado en ruedas).
M2: GPS Absoluto	Baja (error estándar 2 - 5 m en exteriores, inoperativo en interiores).	Baja (1 Hz - 10 Hz).	Bajo (módulo comercial estándar).
M3: GPS Diferencial (DGPS/RTK)	Excelente y sin deriva acumulada (1 - 2 cm).	Media (5 Hz - 20 Hz).	Alto (estación base y enlaces RF).

Cuestión 3 (1.0 Punto): Tipos de Trayectorias Articulares

- 1) **PTP no coordinado:** Cada eje viaja a su velocidad límite; terminan en instantes distintos.
- 2) **PTP coordinado:** Se ajusta el tiempo de todos los ejes al del más lento; todos arrancan y se detienen sincronizadamente, reduciendo esfuerzos mecánicos.
- 3) **Interpolada continua (cartesiana):** Se exige que el efector recorra una línea recta o arco circular en el espacio, resolviendo cinemática inversa en tiempo real.