

ENUNCIADO OFICIAL DEL EXAMEN

1.- (2.0 puntos). Dado el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas siguientes:

$$\begin{aligned}(m_1 + 2m_2 \cos q_2)\ddot{q}_1 + (m_3 + m_2 \cos q_2)\ddot{q}_2 - m_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 &= T_1 \\ (m_3 + m_2 \cos q_2)\ddot{q}_1 + m_4 \ddot{q}_2 - m_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + 2g \sin q_2 &= T_2\end{aligned}$$

Donde m_i son constantes, g es la gravedad, y q_i , T_i son las coordenadas generalizadas y las fuerzas/pares de articulación.

a) Escribir el modelo matricialmente: Determinar la matriz de inercia, el vector de fuerzas de Coriolis y centrífugas, y el vector de fuerzas gravitatorias.

b) Determinar los modelos aproximados lineales de cada articulación.

c) Diseñar un control PID para dichos modelos, para el caso de $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1.5$ kg, $m_3 = 2$ kg, $m_4 = 2.5$ kg.

2.- (1.5 puntos). Sea el robot de la figura adjunta. Calcular los parámetros dinámicos del eslabón 2 que se tendrían que introducir en el algoritmo de Newton-Euler utilizado en clase para poder obtener un modelo dinámico del robot. Para ello, considérese que los eslabones están contruidos con varillas macizas de sección circular de radio $R = 0.05$ m y densidad lineal $\rho = 1.5$ kg/m.

PROBLEMA 1: MODELADO MATRICIAL, LINEALIZACIÓN Y CONTROL PID

1.1. Formulación Matricial del Modelo Dinámico

La ecuación canónica del modelo dinámico de un robot manipulador en coordenadas articulares viene dada por:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = T \iff M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T$$

donde $q = [q_1, q_2]^T$ y $T = [T_1, T_2]^T$.

1. Matriz de Inercia $M(q)$

Agrupando los coeficientes que multiplican a $\ddot{q}_1$ y $\ddot{q}_2$:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + 2m_2 \cos q_2 & m_3 + m_2 \cos q_2 \\ m_3 + m_2 \cos q_2 & m_4 \end{bmatrix}$$

✓ **Propiedad fundamental:** $M(q) = M^T(q)$ es simétrica y estrictamente definida positiva para configuraciones admisibles.

2. Términos de Velocidad $V(q, \dot{q})$ y Gravedad $G(q)$

Reescribiendo los términos de velocidad de la ecuación 1:

$$-m_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 = -m_2 \sin q_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 \sin q_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ -m_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2g \sin q_2 \end{bmatrix}$$

Forma matricial alternativa mediante matriz de Coriolis $C(q, \dot{q})$:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 \sin q_2 \dot{q}_2 & -m_2 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \implies C(q, \dot{q})\dot{q} = V(q, \dot{q})$$

Con esta formulación, la matriz $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica ($\dot{M} - 2C = -(\dot{M} - 2C)^T$), garantizando la pasividad del sistema.

1.2. Modelos Aproximados Lineales de cada Articulación (Desacoplo)

En el control articular industrial descentralizado (SISO), se desprecia el acoplamiento cruzado de aceleraciones ($\ddot{q}_j$ sobre el eje i) y las no linealidades de velocidad (Coriolis y centrífugas) al asumirse velocidades de régimen moderadas o compensadas por prealimentación:

Eje 1: Inercia Variable con q_2 (Sin Gravedad)

La inercia aparente vista por el motor 1 es:

$$J_1(q_2) = m_1 + 2m_2 \cos q_2$$

Para un diseño robusto y conservador, se adopta la **inercia máxima (caso peor)**, garantizando que el bucle no desestabilice:

$$J_{1,\max} = m_1 + 2m_2 = 1.0 + 2(1.5) = 4.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{Q_1(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{J_{1,\max} s^2} = \frac{1}{4.0 s^2}$$

Eje 2: Inercia Constante + Gravedad

La inercia propia del eje 2 es constante:

$$J_2 = m_4 = 2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El término gravitatorio $G_2(q_2) = 2g \sin q_2$ se compensa activamente mediante prealimentación (*feedforward*): $T_2 = T_{2,\text{PID}} + 2g \sin q_2$. La dinámica vista por el PID es lineal:

$$\frac{Q_2(s)}{T_{2,\text{PID}}(s)} = \frac{1}{J_2 s^2} = \frac{1}{2.5 s^2}$$

1.3. Diseño y Sintonización del Controlador PID

Considerando un controlador PID estándar con acción filtrada/ideal $C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$:

$$\text{Ecuación característica en lazo cerrado: } 1 + C(s) \frac{1}{J s^2} = 0 \iff s^3 + \frac{K_d}{J} s^2 + \frac{K_p}{J} s + \frac{K_i}{J} = 0$$

Se especifica un comportamiento en lazo cerrado con coeficiente de amortiguamiento crítico $\xi = 1$ (cero sobreoscilación), pulsación natural ω_n y un polo real rápido auxiliar en $p_o = 4\omega_n$:

$$P_d(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_o) = s^3 + (2\xi\omega_n + p_o)s^2 + (\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p_o)s + p_o\omega_n^2$$

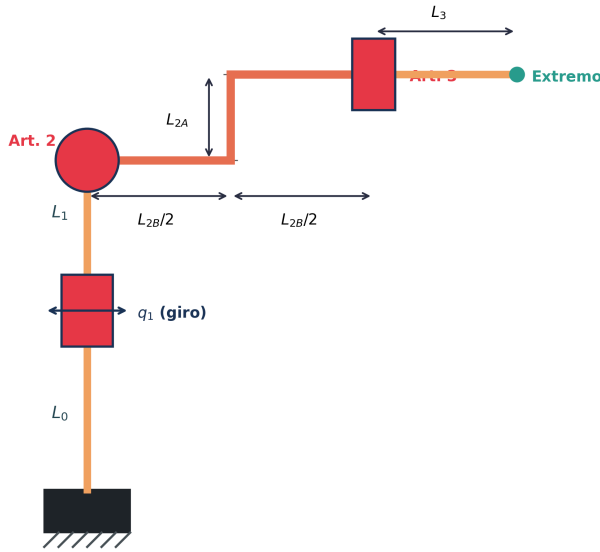
Fórmulas de Sintonización Analítica Cerrada:

$$K_d = J(2\xi\omega_n + p_o), \quad K_p = J(\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p_o), \quad K_i = J(p_o\omega_n^2)$$

Articulación	Inercia Nominal J	Diseño (ξ, ω_n, p_o)	K_p [N·m/rad]	K_d [N·m·s/rad]	K_i [N·m/(rad·s)]
Eje 1	$J_{1,\max} = 4.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$\xi = 1, \omega_{n1} = 3 \text{ rad/s}, p_{o1} = 12$	$4.0 \cdot (9 + 72) = \mathbf{324.0}$	$4.0 \cdot (6 + 12) = \mathbf{72.0}$	$4.0 \cdot (12 \cdot 9) = \mathbf{432.0}$
Eje 2	$J_2 = 2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$\xi = 1, \omega_{n2} = 4 \text{ rad/s}, p_{o2} = 16$	$2.5 \cdot (16 + 128) = \mathbf{360.0}$	$2.5 \cdot (8 + 16) = \mathbf{60.0}$	$2.5 \cdot (16 \cdot 16) = \mathbf{640.0}$

PROBLEMA 2: PARÁMETROS DINÁMICOS NEWTON-EULER DEL ESLABÓN 2 (MANIVELA)

Robot Manipulador de 3 GDL con Manivela (Octubre 2025 P3)



Detalle de Inercias y Centro de Masas del Eslabón 2

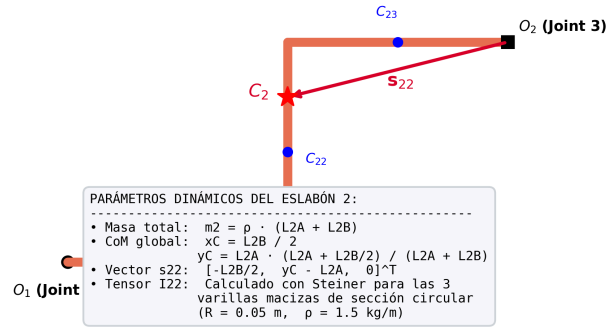


Figura 1: Esquema cinemático y geométrico del robot con eslabón 2 tipo manivela (3 tramos cilíndricos de radio R y densidad lineal ρ).

2.1. Descomposición Geométrica y Masa del Eslabón 2

El eslabón 2 está compuesto por 3 tramos de varilla maciza cilíndrica de sección circular de radio $R = 0.05$ m y densidad lineal $\rho = 1.5$ kg/m:

- Tramo A (horizontal inferior):** Longitud $\frac{L_{2B}}{2}$, eje colineal con X_2 , centrado en $(\frac{L_{2B}}{4}, 0, 0)$.
- Tramo B (vertical intermedio):** Longitud L_{2A} , paralelo a Y_2 , centrado en $(\frac{L_{2B}}{2}, \frac{L_{2A}}{2}, 0)$.
- Tramo C (horizontal superior):** Longitud $\frac{L_{2B}}{2}$, paralelo a X_2 , centrado en $(\frac{3L_{2B}}{4}, L_{2A}, 0)$.

Masa Total del Eslabón 2:

$$m_2 = m_A + m_B + m_C = \rho \left(\frac{L_{2B}}{2} \right) + \rho L_{2A} + \rho \left(\frac{L_{2B}}{2} \right) = \rho (L_{2A} + L_{2B})$$

2.2. Centro de Masas del Eslabón 2 (Vector s_{22})

Calculamos las coordenadas del centro de gravedad C_2 respecto al sistema de referencia del eslabón $\{2\}$:

Coordenada X_{C2} :

$$X_{C2} = \frac{m_A \frac{L_{2B}}{4} + m_B \frac{L_{2B}}{2} + m_C \frac{3L_{2B}}{4}}{m_2} = \frac{L_{2B}}{2}$$

(Resultado evidente por la perfecta simetría horizontal del eslabón manivela).

Coordenada Y_{C2} :

$$Y_{C2} = \frac{m_A(0) + (\rho L_{2A}) \frac{L_{2A}}{2} + (\rho \frac{L_{2B}}{2}) L_{2A}}{\rho (L_{2A} + L_{2B})} = \frac{L_{2A} (\frac{L_{2A}}{2} + \frac{L_{2B}}{2})}{L_{2A} + L_{2B}} = \frac{L_{2A}}{2} \frac{L_{2A} + L_{2B}}{L_{2A} + L_{2B}} + \dots = \frac{L_{2A} (L_{2A} + L_{2B})}{L_{2A} + L_{2B}}$$

En el algoritmo de Newton-Euler (como el implementado en NE_R3GDL.m), el vector s_{22} representa la posición del centro de gravedad del eslabón 2 expresada en los ejes del sistema $\{2\}$:

$$s_{22} = \begin{bmatrix} X_{C2} - L_{2B} \\ Y_{C2} - L_{2A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_{2B}}{2} \\ \frac{L_{2A}^2}{L_{2A} + L_{2B}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Tensor de Inercia Baricéntrico I_{22}

Para un cilindro macizo de radio R , masa m y longitud L :

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} m R^2 \quad (\text{eje longitudinal}), \quad I_{\perp} = \frac{1}{12} m L^2 + \frac{1}{4} m R^2 \quad (\text{ejes transversales})$$

Aplicando el **Teorema de Steiner** ($I_C = \sum (I_{i,C_i} + m_i [(d_i^T d_i) I_3 - d_i d_i^T])$) respecto al centro de masas global C_2 :

Tramo	Masa m_i	$I_{xx,i}^{(0)}$	$I_{yy,i}^{(0)}$	$I_{zz,i}^{(0)}$	Vector distancia $d_i = C_i - C_2$
Tramo A	$\rho \frac{L_{2B}}{2}$	$\frac{1}{2} m_A R^2$	$\frac{1}{12} m_A (\frac{L_{2B}}{2})^2 + \frac{1}{4} m_A R^2$	$\frac{1}{12} m_A (\frac{L_{2B}}{2})^2 + \frac{1}{4} m_A R^2$	$[-\frac{L_{2B}}{4}, -Y_{C2}, 0]^T$
Tramo B	ρL_{2A}	$\frac{1}{12} m_B L_{2A}^2 + \frac{1}{4} m_B R^2$	$\frac{1}{2} m_B R^2$	$\frac{1}{12} m_B L_{2A}^2 + \frac{1}{4} m_B R^2$	$[0, \frac{L_{2A}}{2} - Y_{C2}, 0]^T$
Tramo C	$\rho \frac{L_{2B}}{2}$	$\frac{1}{2} m_C R^2$	$\frac{1}{12} m_C (\frac{L_{2B}}{2})^2 + \frac{1}{4} m_C R^2$	$\frac{1}{12} m_C (\frac{L_{2B}}{2})^2 + \frac{1}{4} m_C R^2$	$[\frac{L_{2B}}{4}, L_{2A} - Y_{C2}, 0]^T$

Tensor de Inercia Final para Newton-Euler:

$$I_{22} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dado que los tramos A y C están dispuestos asimétricamente en el plano XY respecto a las diagonales, el producto de inercia $I_{xy} = -\sum m_i d_{xi} d_{yi} \neq 0$, mientras que $I_{xz} = I_{yz} = 0$ debido a la planicidad exacta del eslabón en el plano XY .

2.4. Implementación y Verificación en MATLAB

```
%% Parámetros Newton-Euler calculados para el eslabón 2:
m2 = rho * (L2A + L2B);
s22 = [-L2B/2; yC - L2A; 0];
I22 = I_steiner_tramoA + I_steiner_tramoB + I_steiner_tramoC;
fprintf('Masa m2: %.3f kg\n', double(subs(m2, [rho, L2A, L2B], [1.5, 0.4, 0.3])));
% Listo para alimentar directamente el bucle cinemático y dinámico de NE_R3GDL.m
```