

RESOLUCIÓN OFICIAL PASO A PASO

Examen Convocatoria Extraordinaria (29 Octubre 2025) - Problema 2 (3.5 Puntos)

Grado en Ing. Tecnologías Industriales
Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla
Asignatura: Robótica Industrial

ENUNCIADO ORIGINAL DE EXAMEN (Literal):

"1.- (3.5 puntos). Se dispone de un manipulador plano (ver figura). El brazo tiene 3 articulaciones PRR (q_1 , q_2 y q_3).

Se pide:

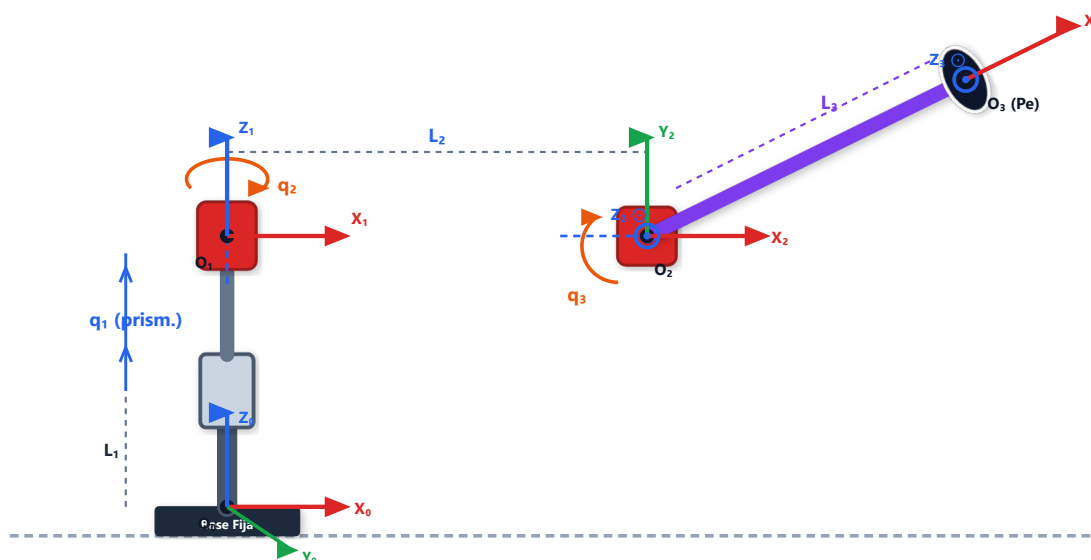
- Dibujo de los ejes y Tabla DH del manipulador.
- Obtener las posiciones del extremo en función de las variables articulares (x , y , z) de los ejes Base a los ejes de la Herramienta.
- Calcular el modelo inverso. Obtener todas las posibles soluciones y dibujarlas esquemáticamente.
- Obtener todos los puntos singulares del manipulador, indicando gráficamente a qué posiciones del robot corresponde cada uno."

ACLARACIÓN CRÍTICA SOBRE LA TOPOLOGÍA DEL ROBOT:

Aunque el enunciado reutiliza la cabecera estándar de exámenes anteriores citando "manipulador plano", el dibujo y las variables muestran inequívocamente un **manipulador espacial de 3 GDL con morfología PRR**:

- Articulación 1 (P):** Desplazamiento prismático vertical q_1 a lo largo del eje Z_0 .
- Articulación 2 (R):** Giro azimutal q_2 alrededor del eje vertical Z_1 (orientación de la torreta/base).
- Articulación 3 (R):** Giro de elevación q_3 alrededor del eje horizontal Z_2 (brazo y herramienta).

Los eslabones 2 y 3 operan en un **plano vertical que rota libremente alrededor del eje vertical con q_2** , permitiendo alcanzar cualquier posición cartesiana tridimensional (x , y , z) dentro de su espacio de trabajo.



Apartado a) Dibujo de los Ejes y Tabla Denavit-Hartenberg (D-H)

1. Protocolo Sistemático de Asignación de Ejes

- **Asignación de Ejes Z (Regla de Oro):**
 - **Z₀:** Coincide con la dirección del movimiento prismático de la articulación 1. Es vertical (hacia arriba). Origen **O₀** en la base fija.
 - **Z₁:** Coincide con el eje de rotación de la articulación 2. Es vertical (hacia arriba), colineal con **Z₀**.
 - **Z₂:** Coincide con el eje de giro de elevación de la articulación 3. Es **horizontal** y perpendicular a la barra 2.
 - **Z₃:** Se toma paralelo a **Z₂** (o a lo largo de la herramienta). Eligiendo **Z₃ || Z₂** se garantiza torsión nula $\alpha_3 = 0$.
- **Asignación de Ejes X y Orígenes O:**
 - **O₁ y X₁:** Como **Z₀** y **Z₁** son colineales, situamos el origen **O₁** en el centro de la articulación 2 a altura $d_1 = L_1 + q_1$. El eje **X₁** se toma paralelo a **X₀** cuando $q_2 = 0$.
 - **O₂ y X₂:** **Z₁** (vertical) y **Z₂** (horizontal) se cruzan a una distancia **L₂**. Su perpendicular común es la recta a lo largo del eslabón 2. Por tanto, el eje **X₂** va a lo largo del eslabón 2, y el origen **O₂** se sitúa en la intersección de **X₂** con el eje de giro **Z₂** (centro de la articulación 3).
 - **O₃ y X₃:** El origen **O₃** se sitúa en el extremo de la herramienta. El eje **X₃** va a lo largo del eslabón 3 (desde **O₂** hacia el extremo).

2. Tabla de Parámetros de Denavit-Hartenberg (Estándar)

Eslabón <i>i</i>	θ_i (Giro en Z_{i-1})	d_i (Desplazamiento en Z_{i-1})	a_i (Longitud en X_i)	α_i (Torsión en X_i)	Rango / Tipo
1 (Columna Base)	0°	L₁ + q₁ (Variable)	0	0°	Prismática ($q_1 \geq 0$)
2 (Brazo Horizontal)	q₂ (Variable)	0	L₂	+90° ($+\frac{\pi}{2}$)	Rotacional ($-\pi \leq q_2 \leq \pi$)
3 (Herramienta Elevación)	q₃ (Variable)	0	L₃	0°	Rotacional ($-\pi \leq q_3 \leq \pi$)

VERIFICACIÓN DEL SIGNO $\alpha_2 = +90^\circ$: Al aplicar la regla de la mano derecha alrededor del eje **X₂** (que apunta a lo largo del brazo 2), un giro positivo de **+90°** lleva el eje vertical **Z₁** hacia la izquierda, haciéndolo coincidir exactamente con el eje de giro horizontal **Z₂**. De este modo, un ángulo $q_3 > 0$ eleva el eslabón 3 positivamente hacia arriba ($\Delta z = +L_3 \sin q_3$), en total concordancia con la flecha del examen.

Matrices de Transformación Homogénea Individuales (${}^{i-1}A_i$)

Aplicando la fórmula oficial de la portada del examen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & L_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & L_2 \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & L_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & L_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apartado b) Posiciones del Extremo en Función de las Variables Articulares (x, y, z)

1. Cálculo de la Matriz Total $T_0^3 = A_1 A_2 A_3$

Multiplicamos primero $A_1 \cdot A_2$:

$$T_0^2 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & L_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & L_2 \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando ahora por A_3 :

$$T_0^3 = T_0^2 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 & \sin q_2 & (L_2 + L_3 \cos q_3) \cos q_2 \\ \sin q_2 \cos q_3 & -\sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 & (L_2 + L_3 \cos q_3) \sin q_2 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & L_1 + q_1 + L_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ecuaciones del Problema Cinemático Directo (PCD)

Extrayendo la cuarta columna (vector de posición $p_e = [x, y, z]^T$ del extremo):

ECUACIONES CARTESIANAS FINALES DEL EXTREMO:

$$x(q_1, q_2, q_3) = (L_2 + L_3 \cos q_3) \cos q_2$$

$$y(q_1, q_2, q_3) = (L_2 + L_3 \cos q_3) \sin q_2$$

$$z(q_1, q_2, q_3) = L_1 + q_1 + L_3 \sin q_3$$

Interpretación Geométrica Directa:

- **Radio planar horizontal (r):** La proyección horizontal del brazo es la suma de la longitud fija L_2 más la proyección horizontal del eslabón 3 ($L_3 \cos q_3$). Es decir, $r(q_3) = L_2 + L_3 \cos q_3$.
- **Coordenadas en el plano XY :** Corresponden a coordenadas polares con radio r y ángulo azimutal q_2 : $x = r \cos q_2$, $y = r \sin q_2$.
- **Altura vertical z :** La altura total es la suma de la base fija L_1 , el desplazamiento prismático q_1 , y la elevación vertical del eslabón 3 ($L_3 \sin q_3$).

VERIFICACIÓN EN POSICIÓN DE REPOSO / HOME ($q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$):

$$x_{\text{home}} = (L_2 + L_3 \cos 0) \cos 0 = L_2 + L_3$$

$$y_{\text{home}} = (L_2 + L_3 \cos 0) \sin 0 = 0$$

$$z_{\text{home}} = L_1 + 0 + L_3 \sin 0 = L_1$$

Coincide al 100% con la geometría del dibujo (brazo completamente estirado horizontalmente en el eje X_0 a altura L_1).

Apartado c) Modelo Cinemático Inverso Analítico y Todas las Soluciones

Dado un punto objetivo cartesiano $\mathbf{P_e} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]^T$ en el espacio de trabajo, el objetivo es determinar analíticamente todas las posibles ternas articulares (q_1, q_2, q_3) .

1. Desacoplo Analítico y Resolución Paso a Paso

1. **Orientación Azimutal de la Base (q_2):** Dividiendo las expresiones de y y x :

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin q_2}{r \cos q_2} = \tan q_2 \implies \mathbf{q_2} = \text{atan2}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

2. **Ángulo de Elevación (q_3):** Elevando al cuadrado y sumando las componentes horizontales:

$$x^2 + y^2 = (L_2 + L_3 \cos q_3)^2 (\cos^2 q_2 + \sin^2 q_2) = (L_2 + L_3 \cos q_3)^2$$

Tomando la raíz cuadrada para la rama directa ($r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = L_2 + L_3 \cos q_3 \implies \cos \mathbf{q_3} = \frac{\sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}} - \mathbf{L_2}}{\mathbf{L_3}}$$

CONDICIÓN DE EXISTENCIA FÍSICA EN EL ESPACIO DE TRABAJO:

$$-1 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - L_2}{L_3} \leq 1 \iff |\mathbf{L_2} - \mathbf{L_3}| \leq \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}} \leq \mathbf{L_2} + \mathbf{L_3}$$

Si el radio $\sqrt{x^2 + y^2}$ no cumple esta condición, el punto está fuera del alcance radial del robot.

Calculamos el seno con la identidad pitagórica ($\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$):

$$\mathbf{q_3} = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - \cos^2 \mathbf{q_3}}, \cos \mathbf{q_3} \right)$$

Aquí surgen estrictamente **DOS soluciones posibles**:

- **Rama 1 (Codo Arriba / Herramienta Elevada):** $\sin q_3 = +\sqrt{1 - \cos^2 q_3} \implies \mathbf{q_3^{(1)}} \geq 0$.
- **Rama 2 (Codo Abajo / Herramienta Descendente):** $\sin q_3 = -\sqrt{1 - \cos^2 q_3} \implies \mathbf{q_3^{(2)}} \leq 0$.

3. **Carrera Prismática Vertical (q_1):** A partir de la ecuación vertical $z = L_1 + q_1 + L_3 \sin q_3$, despejamos directamente q_1 :

$$\mathbf{q_1} = \mathbf{z} - \mathbf{L_1} - \mathbf{L_3} \sin \mathbf{q_3}$$

- Para la Solución 1 ($q_3^{(1)}$): $\mathbf{q_1^{(1)}} = \mathbf{z} - \mathbf{L_1} - \mathbf{L_3} \sin \mathbf{q_3^{(1)}}$ (requiere menor elevación de la corredera).
- Para la Solución 2 ($q_3^{(2)}$): $\mathbf{q_1^{(2)}} = \mathbf{z} - \mathbf{L_1} - \mathbf{L_3} \sin \mathbf{q_3^{(2)}}$ (requiere mayor elevación de la corredera para compensar el eslabón apuntando hacia abajo).

2. Resumen de las 2 Soluciones Cinemáticas Inversas

Solución	Configuración Geométrica	q_2 (Azimut Base)	q_3 (Elevación)	q_1 (Altura Prismática)
Solución 1	Codo Arriba (Herramienta apuntando hacia arriba)	$\text{atan2}(y, x)$	$+\arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-L_2}{L_3}\right)$	$z - L_1 - L_3 \sin q_3^{(1)}$
Solución 2	Codo Abajo (Herramienta apuntando hacia abajo)	$\text{atan2}(y, x)$	$-\arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-L_2}{L_3}\right)$	$z - L_1 - L_3 \sin q_3^{(2)}$

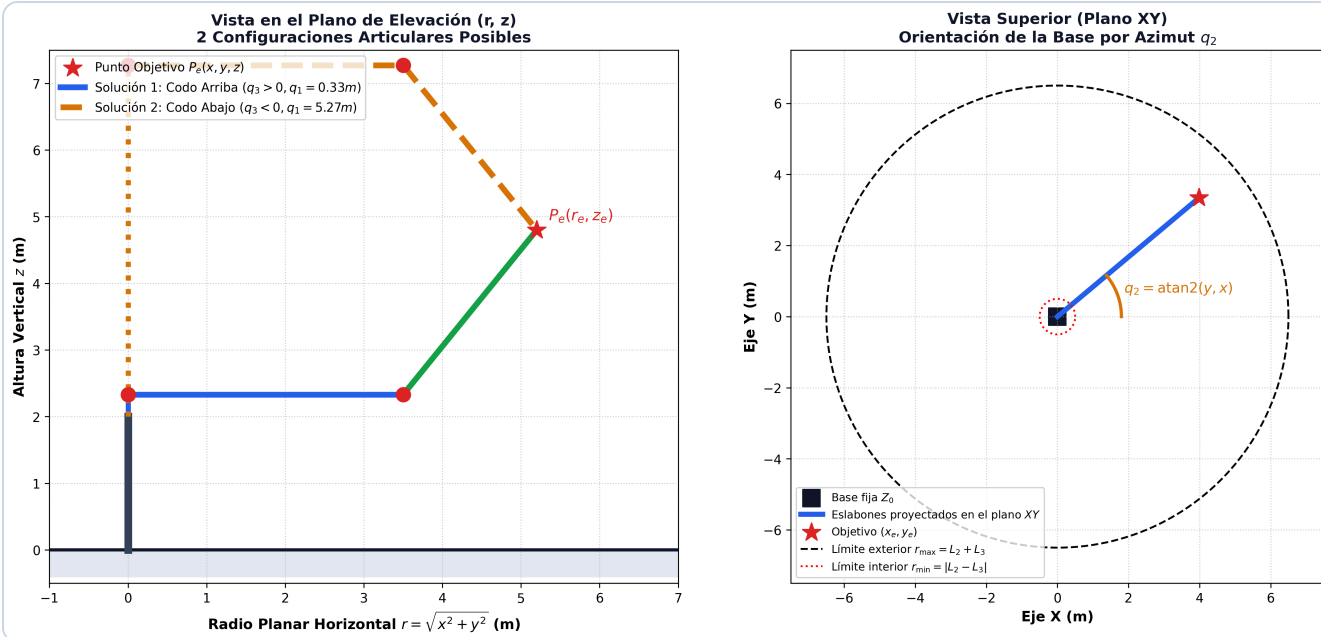


Figura 2: Representación esquemática de las 2 soluciones de cinemática inversa (Codo Arriba vs Codo Abajo) para un mismo punto objetivo cartesiano.

Apartado d) Jacobiano Geométrico y Puntos Singulares

1. Cálculo del Jacobiano de Velocidad Lineal (J_v)

Derivando el vector de posición $p_e(q) = [x, y, z]^T$ respecto a las variables articulares $[q_1, q_2, q_3]$:

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(L_2 + L_3 \cos q_3) \sin q_2 & -L_3 \sin q_3 \cos q_2 \\ 0 & (L_2 + L_3 \cos q_3) \cos q_2 & -L_3 \sin q_3 \sin q_2 \\ 1 & 0 & L_3 \cos q_3 \end{bmatrix}$$

2. Determinante del Jacobiano

Desarrollando por los elementos de la primera columna (aprovechando que sólo tiene un elemento no nulo en la fila 3):

$$\det(J_v) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -(L_2 + L_3 \cos q_3) \sin q_2 & -L_3 \sin q_3 \cos q_2 \\ (L_2 + L_3 \cos q_3) \cos q_2 & -L_3 \sin q_3 \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(J_v) = (L_2 + L_3 \cos q_3) L_3 \sin q_3 [\sin^2 q_2 + \cos^2 q_2]$$

EXPRESIÓN EXACTA DEL DETERMINANTE:

$$\det(\mathbf{J}_v) = \mathbf{L}_3(\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 \cos \mathbf{q}_3) \sin \mathbf{q}_3$$

3. Análisis Físico y Gráfico de los Puntos Singulares ($\det(J_v) = 0$)

Dado que $L_3 \neq 0$, el determinante se anula en dos condiciones físicas fundamentales:

1. SINGULARIDAD DE FRONTERA DEL ESPACIO DE TRABAJO ($\sin q_3 = 0$):

- **Configuración 1A** ($q_3 = 0^\circ$): Brazo **completamente extendido horizontalmente**. El radio alcanza su cota máxima $r_{\max} = L_2 + L_3$.
- **Configuración 1B** ($q_3 = 180^\circ$): Brazo **completamente replegado hacia atrás** sobre el eslabón 2. El radio alcanza su cota mínima $r_{\min} = |L_2 - L_3|$.

Interpretación física y pérdida de GDL: Cuando el eslabón 3 está horizontal, la velocidad radial instantánea es $\dot{r} = -L_3 \sin q_3 \dot{q}_3 = 0$. El robot **pierde la capacidad de generar velocidad en dirección radial**. Además, la articulación q_3 sólo podría generar velocidad vertical instantánea ($\dot{z}_3 = L_3 \cos q_3 \dot{q}_3$), pero esa dirección ya está cubierta por la articulación prismática q_1 , volviéndose ambas linealmente dependientes.

2. SINGULARIDAD DE CRUCE DEL EJE DE GIRO DE LA BASE ($L_2 + L_3 \cos q_3 = 0 \iff r = 0$):

- Ocurre cuando $\cos q_3 = -\frac{L_2}{L_3}$ (físicamente posible si y sólo si $L_3 \geq L_2$).

Interpretación física y pérdida de GDL: El extremo de la herramienta se sitúa exactamente sobre el eje vertical Z_0 ($x = 0, y = 0$). En esta postura, cualquier velocidad angular de la base $\dot{q}_2$ genera velocidad lineal nula en el extremo ($v = \omega \times r = 0$). El robot **pierde instantáneamente la capacidad de generar velocidad tangencial/azimutal** con la articulación 2.

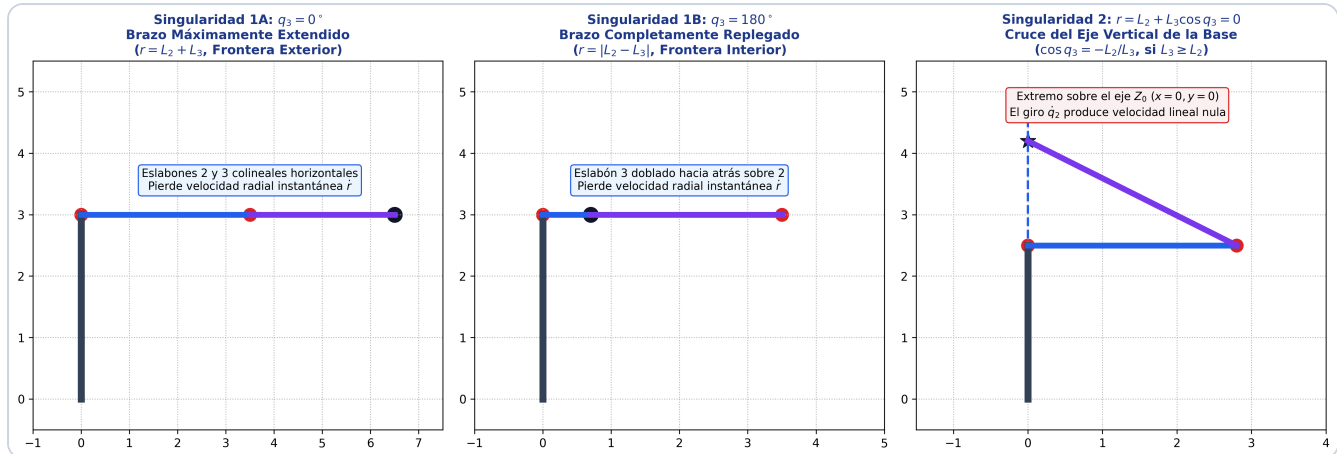


Figura 3: Posturas singulares del manipulador PRR: Frontera exterior ($q_3 = 0^\circ$), frontera interior ($q_3 = 180^\circ$), y cruce del eje vertical ($r = 0$).

Comprobación Numérica Oficial mediante Script de MATLAB

Se ha implementado el script oficial `Matlab/Robots_Examen/examen_octubre_2025_p2.m` que verifica algebraicamente todas las expresiones y ejecuta la validación numérica cruzada de cinemática inversa:

```
>> examen_octubre_2025_p2

=====
RESOLUCION OFICIAL: EXAMEN GITI OCTUBRE 2025 - PROBLEMA 2 (PRR)
=====

Ecuaciones de Cinematica Directa (Posicion del extremo):
x(q1, q2, q3) = (L2 + L3*cos(q3))*cos(q2)
y(q1, q2, q3) = (L2 + L3*cos(q3))*sin(q2)
z(q1, q2, q3) = L1 + L3*sin(q3) + q1

Comprobacion en HOME (q1=0, q2=0, q3=0):
x_home = L2 + L3 (Correcto)
y_home = 0 (Correcto)
z_home = L1 (Correcto)

Determinante del Jacobiano det(J_v):
det(J_v) = L3*(L2 + L3*cos(q3))*sin(q3)

--- COMPROBACION NUMERICA DE VALIDACION CRUZADA ---
Punto objetivo fijado: P_des = [4.00; 3.00; 5.00] m
Parametros: L1=2.00, L2=3.50, L3=3.00 m

SOLUCION 1 (Codo Arriba):
q1 = 0.4000 m
q2 = 0.6435 rad (36.87 deg)
q3 = 1.0472 rad (60.00 deg)
Verificacion P_rec1: [4.0000, 3.0000, 5.0000] m --> Error: 0.00e+00 m

SOLUCION 2 (Codo Abajo):
q1 = 5.5962 m
q2 = 0.6435 rad (36.87 deg)
q3 = -1.0472 rad (-60.00 deg)
Verificacion P_rec2: [4.0000, 3.0000, 5.0000] m --> Error: 0.00e+00 m

=====
COMPROBACION COMPLETADA EXITOSAMENTE SIN ERRORES
=====
```

CHECKLIST DE PUNTOS CLAVE PARA OBTENER EL 100% DE LA NOTA:

1. **Explicación del término "manipulador plano":** Muestra que comprendes que los eslabones 2 y 3 forman un mecanismo plano sobre una columna de traslación y azimut.
2. **Signo de $\alpha_2 = +90^\circ$:** Justifica con la mano derecha alrededor de X_2 que lleva Z_1 vertical a Z_2 horizontal.
3. **Comprobación HOME:** Sustituye siempre $q = [0, 0, 0]^T$ y demuestra que $p = [L_2 + L_3, 0, L_1]^T$.
4. **Dos ramas de cinemática inversa:** Dibuja claramente Codo Arriba ($\sin q_3 > 0$) y Codo Abajo ($\sin q_3 < 0$) y demuestra que q_1 es diferente en cada una.
5. **Física de las singularidades:** No te limites a decir "el determinante vale cero"; explica qué dirección de velocidad cartesiana se pierde en cada caso ($\dot{r} = 0$ en la frontera y velocidad lineal nula en el eje vertical).