

ROBÓTICA — TERCERA CONVOCATORIA (OCTUBRE 2025)

Resolución Oficial Detallada: Problema 1 (Teoría y Cuestiones Aplicadas)

Grado en Ingeniería de Tecnologías
Industriales
Universidad de Sevilla | 29 de Octubre de
2025

TIEMPO: 30 MINUTOS | CALIFICACIÓN:
3.0 PUNTOS

CUESTIÓN 1: FUNCIONAMIENTO Y PRINCIPIO DEL SINCRÓ-RESOLVER (1.0 PUNTO)

Enunciado: Describir cómo funciona un Sincro-Resolver. Qué se mide y en qué se basa para ello. Justificar la respuesta.

1.1. Principio Físico y Qué Mide

El **Sincro-Resolver** (o simplemente *Resolver*) es un sensor de posición angular analógico de tipo inductivo. **Mide:** La posición angular absoluta continua (θ) del rotor a lo largo de una vuelta completa ($0 \leq \theta < 2\pi$), o múltiplos según el número de pares de polos.

1.2. Constitución Electromagnética y Ecuaciones

Consta de un transformador rotativo formado por:

- Rotor (Devanado primario/excitación):** Bobinado excitado mediante una señal senoidal de alta frecuencia (portadora, típicamente de 400 Hz a 10 kHz):

$$V_R(t) = V_0 \sin(\omega t)$$

- Estator (Devanados secundarios):** Dos bobinas desacopladas y desfasadas geométricamente 90° espaciales entre sí. Por la ley de inducción electromagnética de Faraday, el acoplamiento magnético mutuo varía proporcionalmente al seno y coseno del ángulo de giro mecánico θ :

$$V_{S1}(t) = K \cdot V_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta)$$

$$V_{S2}(t) = K \cdot V_0 \sin(\omega t) \cdot \cos(\theta)$$

donde K es la relación de transformación del acoplamiento inductivo.

1.3. Demodulación y RDC (Resolver-to-Digital Converter)

Para obtener el ángulo digital θ en el controlador del robot:

$$\frac{V_{S1}(t)}{V_{S2}(t)} = \frac{K V_0 \sin(\omega t) \sin \theta}{K V_0 \sin(\omega t) \cos \theta} = \tan(\theta) \implies \theta = \arctan \left(\frac{V_{S1}}{V_{S2}} \right)$$

El conversor **RDC** utiliza un bucle cerrado de seguimiento (tipo PLL analógico/digital) que multiplica internamente por $\cos \phi$ y $\sin \phi$ estimadas hasta anular el error $\sin(\theta - \phi) \approx 0$.

Justificación y Ventajas en Robótica Industrial: 1) *Medida Ratiométrica:* El cociente $\tan \theta = V_{S1}/V_{S2}$ cancela fluctuaciones de la amplitud V_0 y de la temperatura.

2) *Inmunidad al ruido (EMI):* Al no tener componentes electrónicos en la propia articulación, resiste altísimas temperaturas, vibraciones e interferencias.

3) *Sensor Absoluto:* Mantiene la posición real sin necesidad de batería tras desconexión eléctrica.

CUESTIÓN 2: TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA ENTRE MARCOS {U} Y {A} (1.0 PUNTO)

Enunciado: Dados los marcos de referencia {U} y {A} que se muestran en la figura, encontrar la transformación T_U^A que los relaciona. Escribir la/s instrucciones de Matlab necesaria para su cálculo, así como los ejes empleados.

2.1 (1.0 punto). Dados los marcos de referencia {U} y {A} que se muestran en la figura, encontrar la **transformación TUA que los relaciona**. Escribir la/s instrucciones de Matlab necesaria para su cálculo, así como los ejes empleados.

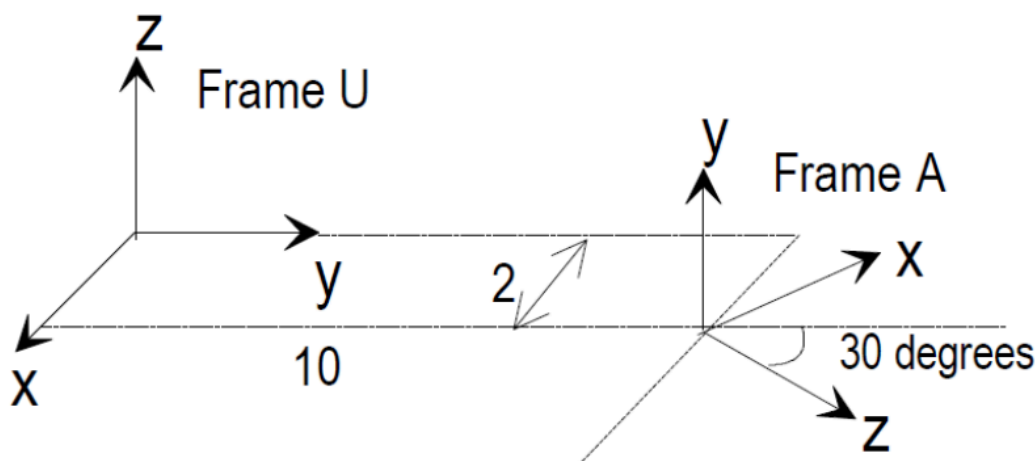


Figura 1: Representación espacial de los marcos {U} y {A} con cotas y ángulos de orientación.

2.1. Determinación del Vector de Posición p_U^A

Observando las cotas desde el origen de {U} hasta el origen de {A}: - Desplazamiento a lo largo de Y_U : +10 unidades.

- Desplazamiento a lo largo de la dirección perpendicular a Y_U en el plano horizontal: la cota de valor 2 se dirige en sentido contrario al eje X_U (hacia el fondo): -2 unidades en X_U .

- Desplazamiento vertical Z_U : 0 unidades.

$$p_U^A = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Determinación de la Matriz de Rotación R_U^A

Las columnas de $R_U^A = [x_A^{(U)}, y_A^{(U)}, z_A^{(U)}]$ son las componentes de los vectores unitarios de {A} expresados en la base {U}:

- **Eje y_A :** Apunta vertical hacia arriba, colineal con z_U :

$$y_A^{(U)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Eje x_A :** Está en el plano horizontal y forma un ángulo de 30° con la dirección de Y_U :

$$x_A^{(U)} = \begin{bmatrix} \sin(30^\circ) \\ \cos(30^\circ) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Eje z_A :** Por la regla de la mano derecha en un sistema dextrógiro ($z_A = x_A \times y_A$):

$$z_A^{(U)} = x_A^{(U)} \times y_A^{(U)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.866 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_U^A = \begin{bmatrix} R_U^A & p_U^A \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -0.5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3. Instrucciones en MATLAB

```
%% Cálculo de la transformación T-UA en MATLAB:
% Método 1: Construcción analítica directa
R-UA = [sin(pi/6), 0, cos(pi/6);
        cos(pi/6), 0, -sin(pi/6);
        0, 1, 0];
p-UA = [-2; 10; 0];
T-UA = [R-UA, p-UA; 0, 0, 0, 1];

% Método 2: Composición mediante Robotics Toolbox (giros canónicos):
% Traslación inicial + Rotación en X de +90° + Rotación en el nuevo Y de -60°
T-UA_toolbox = transl(-2, 10, 0) * trotx(pi/2) * troty(-pi/3);
```

CUESTIÓN 3: DEMOSTRACIÓN DEL DESACOPLO DINÁMICO POR REDUCTORAS (1.0 PUNTO)

Enunciado: DEMOSTRAR por qué la dinámica de un robot manipulador queda desacoplada debido a las reductoras y por tanto pueden utilizarse controladores monovariantes.

3.1. Relaciones Cinemáticas y Energéticas del Accionamiento Indirecto

En un robot manipulador con accionamiento indirecto, los motores están conectados a los eslabones a través de cajas reductoras con relación de transmisión $r_i \gg 1$ ($r_i = \dot{q}_{m,i}/\dot{q}_i$, habitualmente $50 \leq r_i \leq 200$). En forma matricial:

$$q_m = R \cdot q \iff q = R^{-1}q_m, \quad \text{con } R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

Por el principio de los trabajos virtuales (conservación de la potencia mecánica despreciando pérdidas):

$$\tau_m^T \dot{q}_m = \tau^T \dot{q} \iff \tau = R\tau_m \iff \tau_m = R^{-1}\tau$$

3.2. Ecuación Dinámica Referida al Eje del Motor

La dinámica en el espacio de los eslabones viene descrita por la ecuación de Euler-Lagrange:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Sustituyendo $\tau = R\tau_m$ y considerando la inercia propia y rozamiento de los rotores de los motores ($J_m\ddot{q}_m + B_m\dot{q}_m$):

$$\tau_m = (J_m + R^{-1}M(q)R^{-1})\ddot{q}_m + (B_m + R^{-1}C(q, \dot{q})R^{-1})\dot{q}_m + R^{-1}G(q)$$

Definimos la **matriz de inercia equivalente efectiva** vista por los motores:

$$M_{eq}(q) = J_m + R^{-1}M(q)R^{-1}$$

3.3. Análisis del Orden de Magnitud para Reductoras Elevadas ($r_i \gg 1$)

Dado que $R^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n}\right)$, desarrollemos los términos elemento a elemento:

$$M_{eq,ii} = J_{mi} + \frac{M_{ii}(q)}{r_i^2}$$
$$M_{eq,ij} = \frac{M_{ij}(q)}{r_i \cdot r_j} \quad (i \neq j)$$

1. Atenuación Cuadrática del Acoplamiento

Para una reductora típica de robot industrial ($r_i = 100$):

$$r_i^2 = 10\,000, \quad r_i \cdot r_j = 10\,000$$

Los términos de acoplamiento cruzado de inercia $\frac{M_{ij}}{r_i r_j}$ quedan divididos por cuatro órdenes de magnitud (10^{-4}), tendiendo prácticamente a cero:

$$M_{eq,ij} \approx 0 \quad (i \neq j)$$

2. Predominio de la Inercia del Rotor

En la diagonal, la inercia propia del rotor J_{mi} es del mismo orden o superior al término reflejado $\frac{M_{ii}}{r_i^2}$:

$$M_{eq,ii} \approx J_{mi} = \text{cte}$$

Asimismo, las fuerzas no lineales de Coriolis y centrífugas decaen con factor $\frac{1}{r_i^2 r_j} \sim 10^{-6}$, y la gravedad se reduce como $\frac{G_i}{r_i}$.

CONCLUSIÓN FORMAL DE LA DEMOSTRACIÓN:

$$\lim_{r_k \rightarrow \infty} M_{\text{eq}}(q) = J_m = \text{diag}(J_{m1}, J_{m2}, \dots, J_{mn})$$

$$\tau_{mi} \approx J_{mi} \ddot{q}_{mi} + B_{mi} \dot{q}_{mi} + d_i(t)$$

donde todos los acoplos dinámicos no lineales (inerciales cruzados, Coriolis, centrífugos y gravitatorios) quedan reducidos a una perturbación externa de baja magnitud $d_i(t)$.

Por tanto, el sistema multivariable fuertemente acoplado se transforma en n **sistemas lineales e independientes de segundo orden (SISO)**, permitiendo gobernar cada eje de manera descentralizada con **controladores monovariantes estándar (PID o PD)** capaces de rechazar fácilmente dicha perturbación residual mediante su acción integral o término de compensación.