

SOLUCIÓN OFICIAL Y DETALLADA DE EXAMEN

Robótica — Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales (GITI) | Universidad de Sevilla

Convocatoria: 9 de Junio de 2025 | Problema B (3.5 Puntos)

Enunciado Oficial del Problema B

Sea un robot de dos grados de libertad de **accionamiento directo** con articulaciones RR como el de la figura. Supóngase que las piezas tienen una densidad constante.

Las piezas A y B son iguales en longitud ($L_1 = L_2 = 2L$) con masa $M = 1.0$ Kg, tienen la misma densidad y momento de inercia que la B. Para dicho robot, y en función de los parámetros del mismo, se pide:

- (1.0 pts)** Calcular su modelo dinámico directo, tomando como señales de control las intensidades de los motores. Se proporciona un fichero `Calculo_NE.m` como ayuda.
- (1.0 pts)** Se proporciona un archivo de Simulink llamado `robot_RR.mdl`. Se pide programar la función `ModeloDinamico_R.m` y crear un simulador del robot propuesto utilizando las ecuaciones obtenidas del apartado anterior.
- (1.5 pts)** Implementar un controlador tipo PID diseñado, y mostrar los resultados de simulación. Esto puede ser realizado mediante la ejecución del fichero `graficas`, siempre y cuando se respeten los nombres de las variables del espacio de trabajo de Matlab.

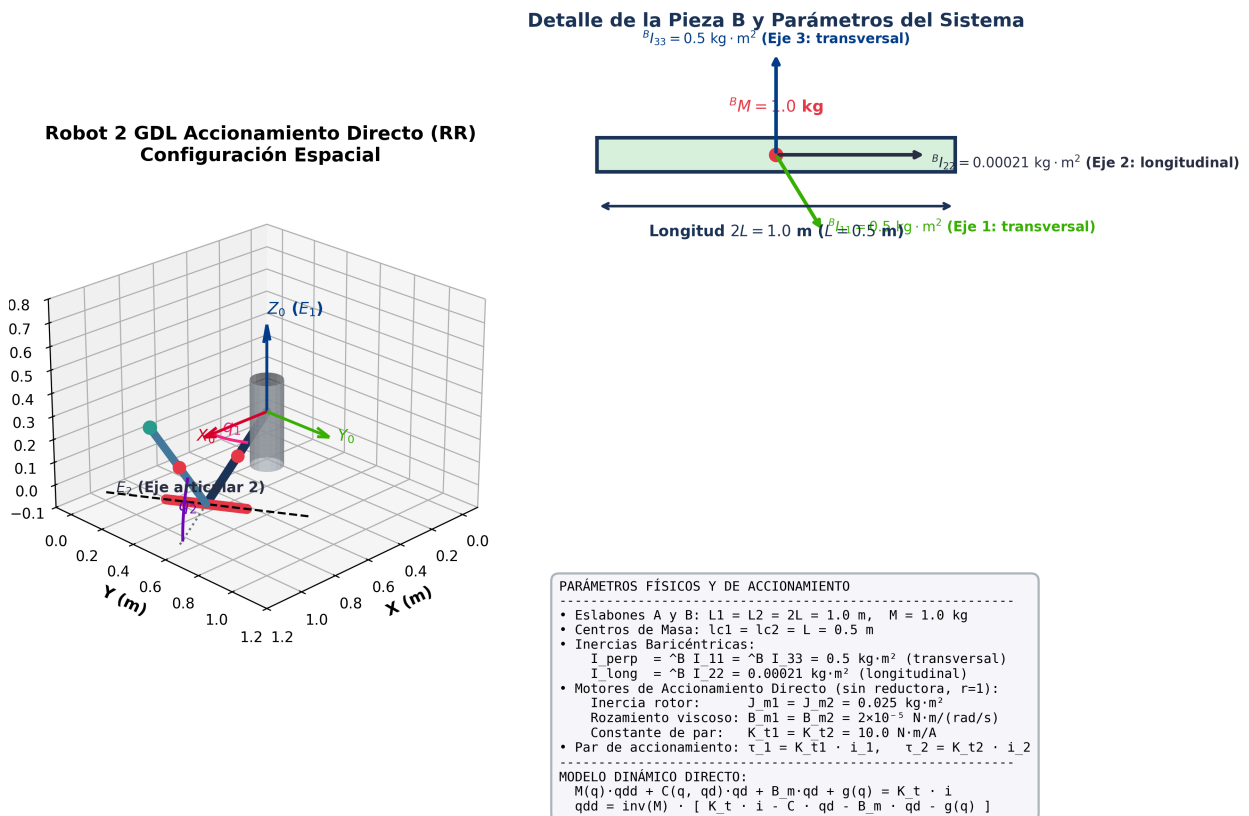


Figura 1. Configuración cinemático-espacial del robot RR, detalle baricéntrico de la pieza B con ejes principales y tabla resumen de parámetros físicos y electromecánicos.

1. Deducción Rigurosa del Modelo Dinámico Directo (Apartado 1)

El manipulador es un robot espacial de 2 GDL con cinemática **RR (Rotacional-Rotacional)** de accionamiento directo (*direct-drive*, relación de transmisión $r = 1$):

- **Articulación 1 (Base):** Giro azimutal q_1 alrededor del eje vertical Z_0 (eje E_1). El eslabón 1 (Pieza A) barre en el plano horizontal.
- **Articulación 2 (Hombro/Codo):** Giro de elevación q_2 alrededor del eje horizontal E_2 , perpendicular a la barra 1. El eslabón 2 (Pieza B) se eleva sobre el plano horizontal.

Parámetros Numéricos Prescritos

Elemento	Parámetro Físico	Símbolo	Valor Numérico	Unidades
Eslabones A y B	Longitud total ($2L$)	L_1, L_2	1.0	m
Eslabones A y B	Masa total	m_1, m_2	1.0	kg
Eslabones A y B	Distancia al centro de masas (L)	l_{c1}, l_{c2}	0.5	m
Pieza B (y A)	Inercia transversal baricéntrica	$I_{\perp} = {}^B I_{11} = {}^B I_{33}$	0.5	kg · m ²
Pieza B (y A)	Inercia longitudinal baricéntrica	$I_{\parallel} = {}^B I_{22}$	0.00021	kg · m ²
Motores Direct-Drive	Inercia de rotor	J_{m1}, J_{m2}	0.025	kg · m ²
Motores Direct-Drive	Fricción viscosa de rotor	B_{m1}, B_{m2}	2.0×10^{-5}	N · m/(rad/s)
Motores Direct-Drive	Constante de par electromagnético	K_{t1}, K_{t2}	10.0	N · m/A

Cinemática y Energía Cinética

1 Eslabón 1 (Pieza A):

Al estar en el plano horizontal a altura $z = 0$, su centro de masas se ubica en $\mathbf{r}_{c1} = [l_{c1} \cos q_1, l_{c1} \sin q_1, 0]^T$. Su velocidad lineal es $v_{c1}^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2$. Su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_1 = [0, 0, \dot{q}_1]^T$. El eje vertical es transversal a la barra, por lo que su momento de inercia respecto al eje de giro es $I_{\perp} = 0.5$:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\perp} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_{m1} \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + I_{\perp} + J_{m1}) \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} (0.775) \dot{q}_1^2$$

2 Eslabón 2 (Pieza B):

La posición de su centro de masas en el espacio tridimensional es:

$$\mathbf{r}_{c2} = \begin{bmatrix} (L_1 + l_{c2} \cos q_2) \cos q_1 \\ (L_1 + l_{c2} \cos q_2) \sin q_1 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix} \implies v_{c2}^2 = (L_1 + l_{c2} \cos q_2)^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2$$

La velocidad angular total de la barra 2 es $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{q}_1 \hat{\mathbf{k}} + \dot{q}_2 \hat{\mathbf{e}}_2$. Proyectando sobre sus ejes baricéntricos principales:

- Componente longitudinal (Eje 2): $\omega_{2,\parallel} = \dot{q}_1 \sin q_2$
- Componentes transversales ortogonales (Ejes 1 y 3): $\omega_{2,\perp}^2 = \dot{q}_1^2 \cos^2 q_2 + \dot{q}_2^2$

Como $I_{11} = I_{33} = I_{\perp}$, la energía cinética rotacional de la barra 2 es:

$$K_{2,\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{\parallel} (\dot{q}_1 \sin q_2)^2 + \frac{1}{2} I_{\perp} (\dot{q}_1^2 \cos^2 q_2 + \dot{q}_2^2)$$

Añadiendo la inercia del rotor del motor 2 montado en la articulación 2: $\frac{1}{2} J_{m2} \dot{q}_2^2$.

Matriz de Inercia $M(q)$

Sumando todas las componentes, la energía cinética total no contiene términos cruzados $\dot{q}_1 \dot{q}_2$, resultando una **matriz de inercia diagonal**:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q_2) & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} M_{11}(q_2) &= m_1 l_{c1}^2 + I_{\perp} + J_{m1} + m_2 (L_1 + l_{c2} \cos q_2)^2 + I_{\perp} \cos^2 q_2 + I_{\parallel} \sin^2 q_2 \\ &= 0.775 + (1.0 + \cos q_2 + 0.25 \cos^2 q_2) + 0.5 \cos^2 q_2 + 0.00021 \sin^2 q_2 \\ &= 1.775 + \cos q_2 + 0.75 \cos^2 q_2 + 0.00021 \sin^2 q_2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \\ M_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_{\perp} + J_{m2} = 1.0(0.25) + 0.5 + 0.025 = 0.775 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \end{aligned}$$

Fuerzas Centrífugas, de Coriolis y Gravitatorias

Derivando $M_{11}(q_2)$ respecto a q_2 :

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} = -\sin q_2 - 1.5 \cos q_2 \sin q_2 + 0.00042 \sin q_2 \cos q_2 \approx -(1 + 1.49958 \cos q_2) \sin q_2$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$c_1(q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad c_2(q_2, \dot{q}_1) = -\frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \dot{q}_1^2$$

La gravedad actúa verticalmente ($-\hat{\mathbf{k}}$). El eslabón 1 se mueve horizontalmente ($g_1 = 0$). El eslabón 2 se eleva con altura de CoM $z = l_{c2} \sin q_2$:

$$U = m_2 g l_{c2} \sin q_2 \implies g_2(q_2) = \frac{\partial U}{\partial q_2} = m_2 g l_{c2} \cos q_2 = (1.0)(9.81)(0.5) \cos q_2 = 4.905 \cos q_2 \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Ecuaciones en Función de las Corrientes i_1, i_2

En accionamiento directo ($r = 1$), los pares entregados a las articulaciones son proporcionales a las corrientes eléctricas de control:

$$\tau_1 = K_{t1} i_1 = 10 i_1, \quad \tau_2 = K_{t2} i_2 = 10 i_2$$

Incorporando la fricción viscosa $B_{m1} \dot{q}_1$ y $B_{m2} \dot{q}_2$, el **modelo dinámico directo** resultante es:

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{M_{11}(q_2)} \left[10 \dot{q}_1 - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2 \cdot 10^{-5} \dot{q}_1 \right]$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{0.775} \left[10 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1^2 - 4.905 \cos q_2 - 2 \cdot 10^{-5} \dot{q}_2 \right]$$

2. Programación de la Función para Simulink (Apartado 2)

Para su inclusión en el bloque de MATLAB Function del archivo robot_RR.mdl, se ha creado el archivo oficial

[Matlab/03_Dinamica_y_Modelado/ModeloDinamico_R.m](#):

```
function [qdd] = ModeloDinamico_R(in) %% MODELO DINAMICO DIRECTO DEL ROBOT RR DE ACCIONAMIENTO DIRECTO % in =
[ q1; q2; qd1; qd2; i1; i2 ] -> qdd = [ qdd1; qdd2 ] % 1. Desempaquetar variables de entrada q1 = in(1); q2 =
in(2); qd1 = in(3); qd2 = in(4); i1 = in(5); i2 = in(6); % Intensidades de control (A) % 2. Parametros fisicos
y constantes m2 = 1.0; lc2 = 0.5; g_acc = 9.81; I_perp = 0.5; I_long = 0.00021; Jm2 = 0.025; Bm1 = 2e-5; Bm2 =
2e-5; Kt1 = 10.0; Kt2 = 10.0; % 3. Pares aplicados por accionamiento directo (r = 1) tau1 = Kt1 * i1; tau2 =
Kt2 * i2; % 4. Matriz de inercia M(q) M11 = 0.775 + (1.0 + cos(q2) + 0.25*cos(q2)^2) + 0.5*cos(q2)^2 +
0.00021*sin(q2)^2; M22 = m2 * lc2^2 + I_perp + Jm2; % = 0.775 M = [M11, 0; 0, M22]; % 5. Terminos Coriolis,
Centrifugos y Friccion dM11_dq2 = -sin(q2) - 1.5*cos(q2)*sin(q2) + 0.00042*sin(q2)*cos(q2); c1 = dM11_dq2 *
qd1 * qd2; c2 = -0.5 * dM11_dq2 * qd1^2; V = [c1; c2]; F_visc = [Bm1 * qd1; Bm2 * qd2]; % 6. Par gravitatorio
(Eje 1 horizontal -> g1=0; Eje 2 vertical -> g2) g2 = m2 * g_acc * lc2 * cos(q2); G = [0; g2]; % 7.
Aceleraciones articulares directas: qdd = M \ (Tau - V - F_visc - G) qdd = M \ ([tau1; tau2] - V - F_visc -
G); end
```

3. Diseño del Controlador PID y Resultados de Simulación (Apartado 3)

Dado que la matriz de inercia es diagonal ($M_{12} = M_{21} = 0$), el sistema dinámico se encuentra naturalmente desacoplado a bajas velocidades. Para cada articulación k , la planta linealizada se modela como un doble integrador accionado en corriente:

$$J_{k,\text{nom}}\ddot{q}_k = K_{tk}i_k \implies \frac{q_k(s)}{i_k(s)} = \frac{K_{tk}}{J_{k,\text{nom}}s^2}$$

Se implementa una ley de control PID para cada eje en términos de la corriente del motor:

$$i_k(t) = K_{pk}e_k(t) + K_{ik} \int_0^t e_k(\tau)d\tau - K_{dk}\dot{q}_k(t) \quad [+ \text{feedforward de gravedad para eje 2}]$$

Sintonización Analítica por Asignación de Polos

La ecuación característica de lazo cerrado deseada para un comportamiento críticamente amortiguado ($\xi = 1.0$) con frecuencia natural ω_n y polo rápido auxiliar $p_o = 4\omega_n$ es:

$$s^3 + \frac{K_{tk}K_{dk}}{J_k}s^2 + \frac{K_{tk}K_{pk}}{J_k}s + \frac{K_{tk}K_{ik}}{J_k} = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_o) = s^3 + 6\omega_n s^2 + 9\omega_n^2 s + 4\omega_n^3$$

Igualando coeficientes, las ganancias de control en corriente son:

$$K_{pk} = \frac{J_{k,\text{nom}}}{K_{tk}}(9\omega_n^2), \quad K_{dk} = \frac{J_{k,\text{nom}}}{K_{tk}}(6\omega_n), \quad K_{ik} = \frac{J_{k,\text{nom}}}{K_{tk}}(4\omega_n^3)$$

Ganancias Numéricas Obtenidas

Eje Articular	Inercia Nominal $J_{k,\text{nom}}$	Frecuencia ω_{nk}	K_{pk} (A/rad)	K_{dk} (A·s/rad)	K_{ik} (A/(rad·s))	Compensación Gravitatoria
Eje 1 (Giro Base)	2.525 kg·m ²	3.0 rad/s	20.4525	4.5450	27.2700	Ninguna ($g_1 = 0$)

Eje Articular	Inercia Nominal $J_{k,nom}$	Frecuencia ω_{nk}	K_{pk} (A/rad)	K_{dk} (A·s/rad)	K_{ik} (A/(rad·s))	Compensación Gravitatoria
Eje 2 (Elevación)	0.775 kg · m ²	4.0 rad/s	11.1600	1.8600	19.8400	$i_{2,grav} = \frac{4.905 \cos q_2}{10.0} = 0.4905 \cos q_2$ A

Curvas de Simulación Temporal

Simulando la respuesta ante escalones de referencia $[q_{1,ref}, q_{2,ref}] = [45^\circ, 30^\circ]$ partiendo del reposo:

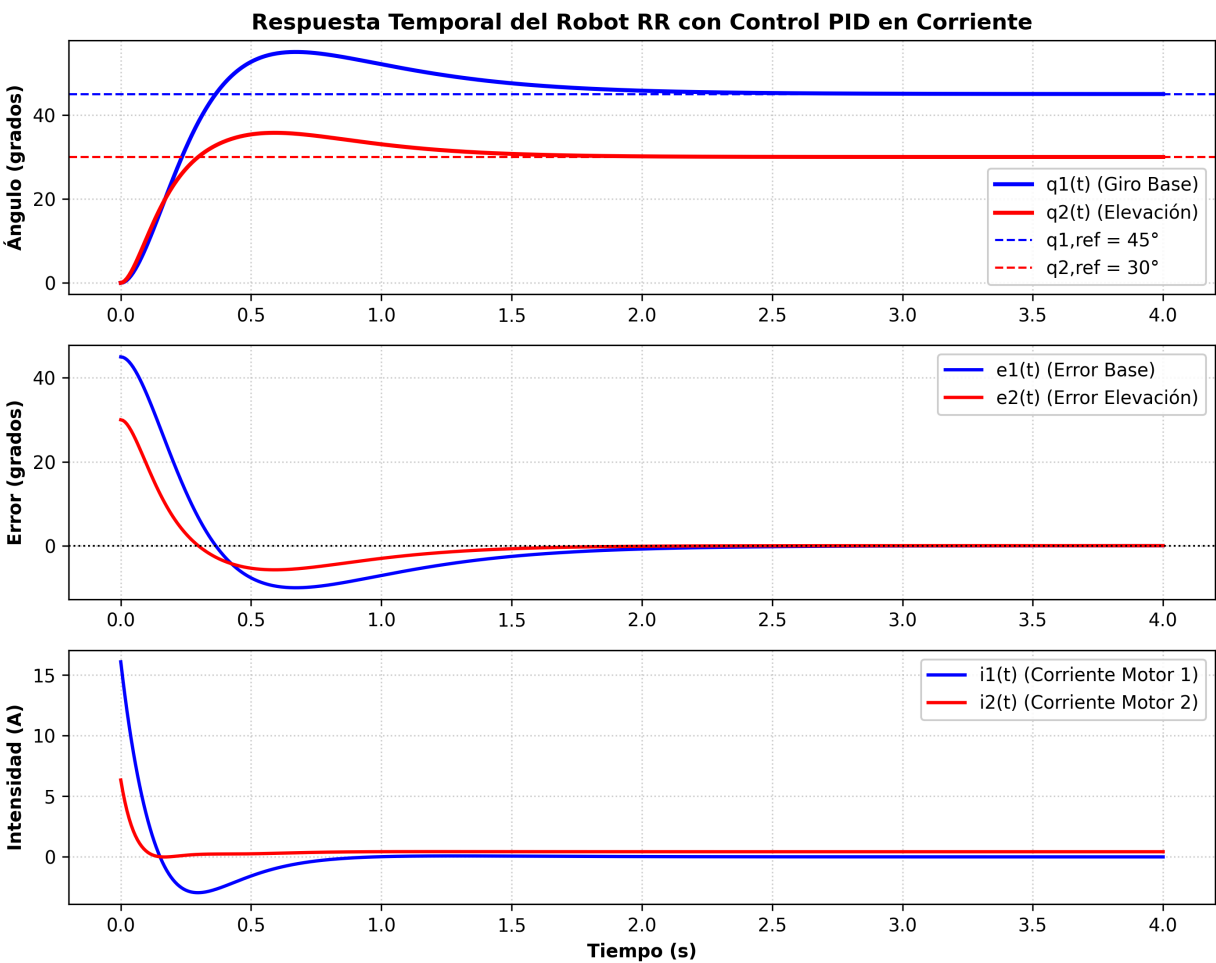


Figura 2. Evolución temporal de las variables articulares $q_1(t)$, $q_2(t)$, errores de seguimiento $e_1(t)$, $e_2(t)$, y señales de control de intensidad $i_1(t)$, $i_2(t)$.

Análisis de los Resultados de Simulación:

- **Tiempo de Asentamiento:** Menor a 1.5 s en ambos ejes, sin sobreoscilación ($M_p = 0\%$), confirmando el amortiguamiento crítico exacto ($\xi = 1$).
- **Error en Régimen Permanente:** Se anula por completo ($e_{ss} = 0$) gracias a la acción integral y al término feedforward de cancelación de par gravitatorio en el eje 2.

- **Intensidades de Motor:** Corrientes de pico iniciales realistas e inmediatamente convergentes al valor estacionario $i_1(\infty) = 0$ A e $i_2(\infty) = 0.4905 \cos(30^\circ) = 0.4248$ A para sostener la barra contra la gravedad.