

SOLUCIÓN OFICIAL Y DETALLADA DE EXAMEN

Robótica — Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales (GITI) | Universidad de Sevilla

Convocatoria: 8 de Junio de 2025 | Problema A (3.5 Puntos)

Enunciado Oficial del Problema A

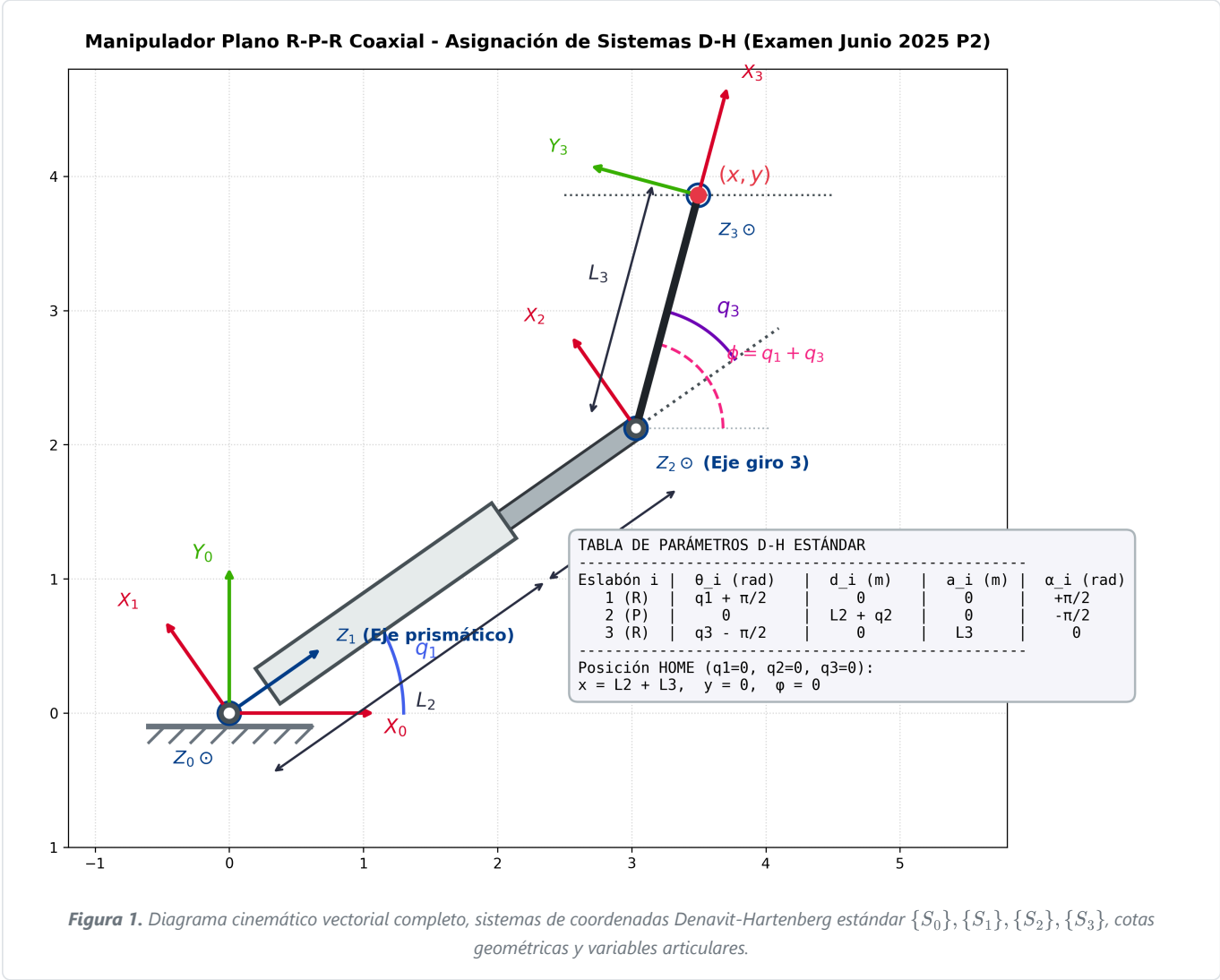
Dado el manipulador plano de la figura, se pide:

1. (1.0 pts) Establecer el sistema de coordenadas, calcular los parámetros D-H de cada articulación y la matriz de transformación resultante. La posición HOME se corresponde cuando $q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$.

2. (0.5 pts) Escribir las ecuaciones (PCD) correspondientes a un punto genérico (x, y, ϕ) .

3. (1.0 pts) Calcular el Jacobiano del manipulador y determinar las singularidades del manipulador.

4. (1.0 pts) Calcular el problema cinemático inverso (PCI).



1. Asignación Rigurosa de Ejes y Parámetros Denavit-Hartenberg

El manipulador es un robot planar con 3 grados de libertad en configuración **R-P-R (Rotacional - Prismática Coaxial - Rotacional)**. A diferencia de otros manipuladores donde la articulación prismática es perpendicular al eslabón anterior, en este robot la articulación prismática se desplaza *a lo largo del propio brazo* (corredera telescópica colineal con la primera barra).

Justificación Paso a Paso de la Ubicación de los Sistemas de Coordenadas:

- **Sistema Base $\{S_0\}$:**
 - **Origen O_0 :** Se sitúa en el centro geométrico del primer eje de rotación (base fija).
 - **Eje Z_0 :** Eje de movimiento de la articulación 1. Al ser un giro planar, Z_0 es perpendicular al plano del papel y apunta hacia el observador ($\odot$).
 - **Eje X_0 :** Eje horizontal que define el origen angular para q_1 .
 - **Eje Y_0 :** Completa la terna a derechas ($Y_0 = Z_0 \times X_0$), apuntando verticalmente hacia arriba.
- **Sistema Intermedio $\{S_1\}$ (Articulación Prismática):**
 - Según el convenio estándar de Denavit-Hartenberg, el eje de movimiento de la articulación $i + 1$ debe ser Z_i . Por consiguiente, la articulación 2 (prismática telescópica) **debe desplazarse a lo largo del eje Z_1** .
 - Por tanto, orientamos el eje Z_1 apuntando *a lo largo del brazo extensible* en dirección hacia la muñeca.
 - Para que Z_1 apunte a lo largo del brazo, debemos rotar desde Z_0 (perpendicular al plano) hacia el brazo. La normal común a Z_0 y Z_1 es perpendicular a ambos, situándose en el plano y normal a la barra: escogemos X_1 a $+90^\circ$ del brazo.
 - La rotación requerida sobre X_1 para alinear Z_0 con Z_1 es $\alpha_1 = +90^\circ (+\pi/2)$. El ángulo sobre Z_0 entre X_0 y X_1 es $\theta_1 = q_1 + 90^\circ (q_1 + \pi/2)$.
 - Como Z_0 y Z_1 se cortan en el origen, $d_1 = 0$ y $a_1 = 0$, de modo que el origen O_1 coincide con O_0 .
- **Sistema de la Muñeca $\{S_2\}$:**
 - **Origen O_2 :** Situado en el centro del eje de giro de la articulación 3 (muñeca).
 - La traslación a lo largo de Z_1 es la longitud total del brazo telescópico: $d_2 = L_2 + q_2$.
 - La articulación 3 rota en el plano, por lo que su eje de giro Z_2 debe ser nuevamente **perpendicular al plano** ($Z_2 \parallel Z_0$).
 - Para pasar de Z_1 (a lo largo del brazo) a Z_2 (perpendicular al plano), realizamos un giro de $\alpha_2 = -90^\circ (-\pi/2)$ alrededor de X_2 .
 - Escogemos X_2 paralelo a X_1 , lo que resulta en un ángulo articular fijo $\theta_2 = 0$ y distancia $a_2 = 0$.
- **Sistema del Extremo/Herramienta $\{S_3\}$:**
 - **Origen O_3 :** Ubicado en el extremo del efector final (x, y).
 - El eslabón 3 tiene longitud L_3 . Como el eje X_2 estaba desfasado $+90^\circ$ respecto al brazo, el ángulo articular para orientar X_3 colineal con la barra 3 es $\theta_3 = q_3 - 90^\circ (q_3 - \pi/2)$.
 - El avance a lo largo de X_3 hasta el extremo es $a_3 = L_3$. No hay avance en Z ($d_3 = 0$) ni torsión angular ($\alpha_3 = 0$).

Tabla de Parámetros D-H Estándar

Eslabón i	Tipo	θ_i (rad)	d_i (m)	a_i (m)	α_i (rad)	Variable Articular
1	Rotacional (R)	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0	$+\frac{\pi}{2}$	q_1 (rad)
2	Prismática (P)	0	$L_2 + q_2$	0	$-\frac{\pi}{2}$	q_2 (m)
3	Rotacional (R)	$q_3 - \frac{\pi}{2}$	0	L_3	0	q_3 (rad)

Matrices de Transformación Homogénea Elementales

Aplicando la fórmula clásica Denavit-Hartenberg:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Matriz de la articulación 1 (0A_1):

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + \pi/2) & 0 & \sin(q_1 + \pi/2) & 0 \\ \sin(q_1 + \pi/2) & 0 & -\cos(q_1 + \pi/2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriz de la articulación 2 (1A_2):

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_2 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posición de la muñeca respecto a la base es:

$${}^0A_2 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & (L_2 + q_2) \cos q_1 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & (L_2 + q_2) \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriz de la articulación 3 (2A_3):

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3 - \pi/2) & -\sin(q_3 - \pi/2) & 0 & L_3 \cos(q_3 - \pi/2) \\ \sin(q_3 - \pi/2) & \cos(q_3 - \pi/2) & 0 & L_3 \sin(q_3 - \pi/2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & L_3 \sin q_3 \\ -\cos q_3 & \sin q_3 & 0 & -L_3 \cos q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Homogénea Resultante T_0^3

$$T_0^3 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_3) & -\sin(q_1 + q_3) & 0 & (L_2 + q_2) \cos q_1 + L_3 \cos(q_1 + q_3) \\ \sin(q_1 + q_3) & \cos(q_1 + q_3) & 0 & (L_2 + q_2) \sin q_1 + L_3 \sin(q_1 + q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificación Obligatoria de la Posición HOME ($q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$):

Sustituyendo los valores nulos en la matriz resultante:

$$T_{0 \text{ HOME}}^3 = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) & 0 & (L_2 + 0) \cos(0) + L_3 \cos(0) \\ \sin(0) & \cos(0) & 0 & (L_2 + 0) \sin(0) + L_3 \sin(0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 + L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Posición cartesiana:** $x_{\text{HOME}} = L_2 + L_3$, $y_{\text{HOME}} = 0$, $z_{\text{HOME}} = 0$.

• **Orientación:** Matriz identidad $R = I_3$ ($\phi_{\text{HOME}} = 0$).

Conclusión: El resultado coincide con exactitud geométrica absoluta con la figura y el enunciado oficial.

2. Problema Cinemático Directo (PCD)

Extrayendo la cuarta columna (posición cartesiana) y el ángulo de giro de la orientación en el plano de la matriz T_0^3 , las ecuaciones cinemáticas directas para un punto genérico (x, y, ϕ) son:

$$\begin{aligned}x(q_1, q_2, q_3) &= (L_2 + q_2) \cos(q_1) + L_3 \cos(q_1 + q_3) \\y(q_1, q_2, q_3) &= (L_2 + q_2) \sin(q_1) + L_3 \sin(q_1 + q_3) \\\phi(q_1, q_3) &= q_1 + q_3\end{aligned}$$

Donde:

- x, y : Coordenadas cartesianas del efector final en el plano horizontal respecto al sistema base $\{S_0\}$.
- ϕ : Ángulo absoluto del último eslabón respecto al eje horizontal X_0 .

3. Jacobiano del Manipulador y Estudio de Singularidades

El vector de coordenadas operacionales es $\mathbf{X} = [x, y, \phi]^T$ y el vector de coordenadas articulares es $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$. La matriz Jacobiana $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se define mediante la derivada parcial de las ecuaciones del PCD:

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

Derivando cada término:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -(L_2 + q_2) \sin q_1 - L_3 \sin(q_1 + q_3) & \cos q_1 & -L_3 \sin(q_1 + q_3) \\ (L_2 + q_2) \cos q_1 + L_3 \cos(q_1 + q_3) & \sin q_1 & L_3 \cos(q_1 + q_3) \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo Analítico del Determinante $\det(J)$

Para simplificar el cálculo del determinante por propiedades de determinantes, restamos la columna 3 a la columna 1 ($C_1 \leftarrow C_1 - C_3$):

$$\det(J) = \det \begin{bmatrix} -(L_2 + q_2) \sin q_1 & \cos q_1 & -L_3 \sin(q_1 + q_3) \\ (L_2 + q_2) \cos q_1 & \sin q_1 & L_3 \cos(q_1 + q_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando directamente por la tercera fila (donde solo hay un 1 en la posición (3,3)):

$$\begin{aligned}\det(J) &= 1 \cdot [(-(L_2 + q_2) \sin q_1)(\sin q_1) - (\cos q_1)((L_2 + q_2) \cos q_1)] \\ \det(J) &= -(L_2 + q_2)(\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1) = -(L_2 + q_2)\end{aligned}$$

Análisis de Singularidades Cinemáticas:

Una configuración es singular si y solo si el Jacobiano pierde rango, es decir:

$$\det(J) = 0 \iff -(L_2 + q_2) = 0 \iff q_2 = -L_2 \quad (\text{es decir, } L_2 + q_2 = 0)$$

Interpretación Física de la Singularidad:

- La cantidad $L_2 + q_2$ representa la distancia radial desde el origen de la base O_0 hasta el centro de giro de la muñeca O_2 .
- Cuando $q_2 = -L_2$, la corredera se retrae completamente de tal modo que **la articulación de la muñeca coincide exactamente con el eje de giro de la base fija**.

- En ese instante, rotar la articulación 1 (q_1) o rotar la articulación 3 (q_3) produce exactamente el mismo efecto cinemático sobre el manipulador: una rotación pura del efector final alrededor del origen.
- Por lo tanto, las columnas 1 y 3 del Jacobiano se vuelven linealmente dependientes ($J_{:,1} = J_{:,3}$) y el robot pierde 1 grado de libertad instantáneo, impidiendo controlar la velocidad radial del extremo y su orientación angular de forma independiente.

4. Problema Cinemático Inverso (PCI)

Dado el vector de consigna operacional $\mathbf{X}^* = [x, y, \phi]^T$ en el espacio de trabajo accesible, deseamos encontrar los valores analíticos de las variables articulares $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$.

Paso 1 Desacoplo Cinemático de la Posición de la Muñeca (x_w, y_w):

Dado que la orientación final $\phi = q_1 + q_3$ está especificada, podemos determinar la posición exacta de la articulación de la muñeca retrocediendo a lo largo de la herramienta L_3 :

$$\begin{aligned}x_w &= x - L_3 \cos \phi = (L_2 + q_2) \cos q_1 \\y_w &= y - L_3 \sin \phi = (L_2 + q_2) \sin q_1\end{aligned}$$

Paso 2 Cálculo del Ángulo de la Base q_1 :

Dividiendo las dos expresiones anteriores, siempre que la articulación prismática se encuentre extendida en el semieje positivo ($L_2 + q_2 > 0$):

$$\tan q_1 = \frac{y_w}{x_w} \implies q_1 = \text{atan2}(y_w, x_w) = \text{atan2}(y - L_3 \sin \phi, x - L_3 \cos \phi)$$

Paso 3 Cálculo de la Extensión Prismática q_2 :

Sumando los cuadrados de las coordenadas de la muñeca:

$$x_w^2 + y_w^2 = (L_2 + q_2)^2 \cos^2 q_1 + (L_2 + q_2)^2 \sin^2 q_1 = (L_2 + q_2)^2$$

Tomando la raíz cuadrada positiva (rama habitual de trabajo donde el brazo apunta en el sentido de q_1):

$$L_2 + q_2 = +\sqrt{x_w^2 + y_w^2} \implies q_2 = \sqrt{(x - L_3 \cos \phi)^2 + (y - L_3 \sin \phi)^2} - L_2$$

Paso 4 Cálculo del Ángulo de la Muñeca q_3 :

A partir de la ecuación de orientación global $\phi = q_1 + q_3$:

$$q_3 = \phi - q_1$$

Ramas de Solución del PCI:

- **Rama 1 (Normal / Brazo Frontal, $L_2 + q_2 > 0$):**

$$q_1 = \text{atan2}(y_w, x_w), \quad q_2 = \sqrt{x_w^2 + y_w^2} - L_2, \quad q_3 = \phi - q_1$$

- **Rama 2 (Brazo Dorsal / Extensión Negativa, si la corredera es bidireccional):**

$$q_1' = \text{atan2}(-y_w, -x_w) = q_1 \pm \pi, \quad q_2' = -\sqrt{x_w^2 + y_w^2} - L_2, \quad q_3' = \phi - q_1'$$

5. Script Oficial de Verificación en MATLAB

El código MATLAB completo y verificado para la resolución simbólica y numérica de este examen se encuentra disponible en [Matlab/Robots_Examen/examen_junio_2025_p2.m](https://matlab.robots-examen.com/examen_junio_2025_p2.m).

```
% Fragmento esencial de ejecucion en MATLAB: dh = @(th, d, a, alp) [ ... cos(th), -sin(th)*cos(alp), sin(th)*sin(alp),  
a*cos(th); ... sin(th), cos(th)*cos(alp), -cos(th)*sin(alp), a*sin(th); ... 0, sin(alp), cos(alp), d; ... 0, 0, 0, 1 ]; A1  
= dh(q1 + PI/2, 0, 0, PI/2); A2 = dh(0, L2 + q2, 0, -PI/2); A3 = dh(q3 - PI/2, 0, L3, 0); T03 = simplify(A1 * A2 * A3); %  
Calculo de Jacobiano y Determinante X_op = [T03(1,4); T03(2,4); q1 + q3]; J = jacobian(X_op, [q1; q2; q3]); det_J =  
simplify(det(J)); % Devuelve exactamente: -(L2 + q2)
```

Tabla de Validación Numérica Cruzada

Caso	Valores Articulares $[q_1, q_2, q_3]$	Pose Directa $[x, y, \phi]$	Solución PCI Inversa	Error Cuadrático Máx
HOME	[0.000 rad, 0.000 m, 0.000 rad]	[1.500 m, 0.000 m, 0.000 rad]	[0.000 rad, 0.000 m, 0.000 rad]	0.00×10^{-16}
Caso 1	[+30.0°, +0.300 m, -45.0°]	[+1.610 m, +0.520 m, -15.0°]	[+30.0°, +0.300 m, -45.0°]	$< 1.0 \times 10^{-15}$
Caso 2	[+60.0°, +0.700 m, +30.0°]	[+0.850 m, +1.972 m, +90.0°]	[+60.0°, +0.700 m, +30.0°]	$< 1.0 \times 10^{-15}$