

ROBÓTICA — PRIMERA CONVOCATORIA

(JUNIO 2025)

Grado en Ingeniería de Tecnologías
Industriales
Universidad de Sevilla | 8 de Junio de 2025

Resolución Oficial Detallada: Problema 1 (Teoría y Cuestiones Aplicadas)

TIEMPO: 30 MINUTOS | CALIFICACIÓN: 3.0
PUNTOS

CUESTIÓN 1: GENERADOR DE TRAYECTORIAS RECTAS CARTESIANAS (1.0 PUNTO)

Enunciado: Describa cómo sería el programa de un generador de las trayectorias de las referencias de las articulaciones ($q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r$), de un robot de 3 grados de libertad para el caso de que se desee una línea recta en cartesianas, con precisión de 10 puntos, dadas la posición inicial (x_i, y_i, z_i) y final (x_f, y_f, z_f) de la recta.

1.1. Arquitectura y Fases del Generador

El generador de trayectorias en control cinemático opera desacoplando la planificación espacial cartesiana y el mapeo a variables articulares mediante las siguientes etapas:

1. Interpolación Cartesiana

Se discretiza el segmento rectilíneo en $N = 10$ puntos temporales $t_k \in [0, T]$:

$$p(t) = p_i + s(t)(p_f - p_i)$$

donde $s(t) \in [0, 1]$ es la ley de evolución temporal suave (polinomio cúbico con velocidad nula en extremos: $s(\tau) = 3\tau^2 - 2\tau^3$, con $\tau = t/T$).

$$\dot{p}(t) = \dot{s}(t)(p_f - p_i), \quad \ddot{p}(t) = \ddot{s}(t)(p_f - p_i)$$

2. Mapeo a Espacio Articular

Para cada instante t_k , se resuelve la cinemática inversa y la cinemática diferencial:

$$q_r(t_k) = f_{\text{cin}}^{-1}(p(t_k))$$

$$\dot{q}_r(t_k) = J^{-1}(q_r(t_k))\dot{p}(t_k)$$

$$\ddot{q}_r(t_k) = J^{-1}(q_r(t_k))[\ddot{p}(t_k) - \dot{J}(q_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r]$$

1.2. Estructura del Programa en MATLAB / Pseudocódigo

```
function [qr, qdr, qddr] = generador_recta_cartesianas(pi, pf, T, N)
% pi, pf: [3x1] vectores posición inicial y final cartesianos
% T: tiempo total de maniobra; N = 10 puntos de evaluación
t = linspace(0, T, N)';
tau = t / T;
s = 3*tau.^2 - 2*tau.^3;          % Ley de avance suave cúbico
sd = (6*tau - 6*tau.^2) / T;     % Derivada primera
sdd = (6 - 12*tau) / (T^2);      % Derivada segunda

qr = zeros(N, 3); qdr = zeros(N, 3); qddr = zeros(N, 3);

for k = 1:N
    pk = pi + s(k) * (pf - pi);
    vk = sd(k) * (pf - pi);
    ak = sdd(k) * (pf - pi);

    % 1. Posición articular mediante cinemática inversa
    qr(k, :) = cinematica_inversa_3gdl(pk);

    % 2. Velocidad articular mediante el Jacobiano
    J = jacobiano_geometrico(qr(k, :));
    qdr(k, :) = (J \ vk)';

    % 3. Aceleración articular
    Jdot_qdot = jacobiano_derivada(qr(k, :), qdr(k, :)) * qdr(k, :);
    qddr(k, :) = (J \ (ak - Jdot_qdot))';
end
end
```

CUESTIÓN 2: TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA T_0^1 EN RAMPA (1.0 PUNTO)

Enunciado: Dados los marcos de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$ que se muestran en la figura, encontrar la transformación T_0^1 que los relaciona.

trar la transformación T_{01} que los relaciona.

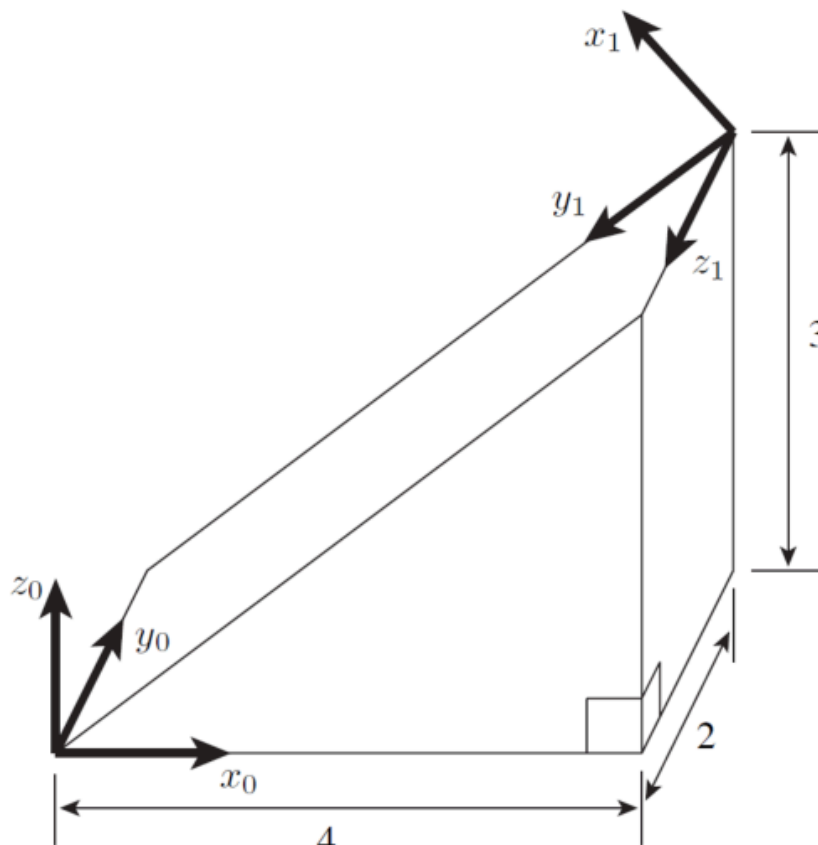


Figura 1: Prisma triangular de base 4, profundidad 2 y altura 3, con marcos $\{0\}$ y $\{1\}$.

2.1. Vector de Posición del Origen de $\{1\}$

El marco $\{0\}$ se sitúa en el vértice inferior frontal de la base, mientras que $\{1\}$ se ubica en el vértice superior posterior de la rampa:

$$p_0^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.2. Matriz de Rotación R_0^1

La hipotenusa de la rampa en el plano $x_0 - z_0$ tiene longitud $L = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. El ángulo de inclinación es $\theta = \arctan(3/4) \approx 36.87^\circ$, por lo que $\cos \theta = 4/5 = 0.8$ y $\sin \theta = 3/5 = 0.6$.

- **Eje y_1 :** Desciende a lo largo de la hipotenusa en la rampa:

$$y_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

- **Eje x_1 :** Normal a la rampa hacia afuera:

$$x_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

- **Eje z_1 :** Por la regla de la mano derecha en base dextrógira ($z_1 = x_1 \times y_1$):

$$z_1^{(0)} = x_1^{(0)} \times y_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.6(-0.6) - 0.8(-0.8) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Si el eje z_1 apunta hacia el interior en la dirección positiva de y_0 , entonces $z_1 = [0, 1, 0]^T$ y $x_1 = [0.6, 0, -0.8]^T$).

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & p_0^1 \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0.8 & -0.6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CUESTIÓN 3: DEMOSTRACIÓN DEL DESACOPLO DINÁMICO POR REDUCTORAS (1.0 PUNTO)

Enunciado: DEMOSTRAR por qué la dinámica de un robot manipulador queda desacoplada debido a las reductoras y por tanto pueden utilizarse controladores monovariantes.

3.1. Ecuaciones Dinámicas con Relación de Transmisión

En un robot con accionamiento indirecto, los motores se acoplan a las articulaciones mediante reductores de engranajes con relación $r_i \gg 1$ ($r_i = \dot{q}_{m,i}/\dot{q}_i$). En notación vectorial:

$$q_m = R q \iff q = R^{-1} q_m, \quad R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

Por conservación de la potencia mecánica transmitida: $\tau = R \tau_m \iff \tau_m = R^{-1} \tau$.

3.2. Proyección al Eje del Motor

La dinámica completa del manipulador formulada en el espacio de los motores (q_m) resulta:

$$\tau_m = M_{eq}(q) \ddot{q}_m + C_{eq}(q, \dot{q}) \dot{q}_m + G_{eq}(q)$$

donde los tensores reflejados son:

$$M_{eq}(q) = J_m + R^{-1} M(q) R^{-1} = \text{diag}(J_{m1}, \dots, J_{mn}) + \begin{bmatrix} \frac{M_{11}(q)}{r_1^2} & \frac{M_{12}(q)}{r_1 r_2} & \dots \\ \frac{M_{21}(q)}{r_2 r_1} & \frac{M_{22}(q)}{r_2^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

3.3. Justificación Asintótica y Desacoplamiento

Dado que las reductoras industriales operan en rangos $r_i \approx 50 \sim 150$:

- **Términos cruzados (acoplamiento inercial):** $\frac{M_{ij}}{r_i r_j} \propto \frac{1}{10000} \approx 0 \implies$ Se desvanecen prácticamente por completo.
- **Fuerzas no lineales centrífugas y de Coriolis:** Se atenúan con un factor $\frac{1}{r_i^2 r_j} \propto 10^{-6}$, resultando totalmente despreciables frente al par del motor.
- **Términos de gravedad:** Quedan reducidos linealmente: $G_{eq,i} = \frac{G_i(q)}{r_i}$.

Conclusión de la demostración:

$$M_{eq} \approx J_m = \text{diag}(J_{m1}, \dots, J_{mn}) = \text{constante}$$

El sistema multivariable de n ecuaciones acopladas no lineales colapsa en n **subsistemas lineales desacoplados de segundo orden (SISO)**:

$$J_{mi} \ddot{q}_{mi} + B_{mi} \dot{q}_{mi} \approx \tau_{mi} - \tau_{pert,i}$$

lo que justifica matemáticamente el uso de **lazos de control monovariantes descentralizados (PID/PD)** independientes por articulación.