

ENUNCIADO ORIGINAL DE EXAMEN (Literal):

"1.- (2.0 puntos). Dado el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas siguientes:

$$\bullet (m_1 L_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 q_2^2) \ddot{q}_1 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_1 L_1 + m_2 q_2) g \cos q_1 = T_1$$

$$\bullet m_2 \ddot{q}_2 - m_2 q_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g \sin q_1 = T_2$$

Donde m_i , L_i , I_i son constantes, g es la gravedad, y q_i , T_i son las coordenadas generalizadas y las fuerzas/pares de la articulación.

a) Escribir el modelo matricialmente: Determinar la matriz de inercia, el vector de fuerzas de Coriolis y centrífugas, y el vector de fuerzas gravitatorias.

b) Determinar los modelos aproximados lineales de cada articulación.

c) Diseñar un control PID para dichos modelos, para el caso de $m_1 = 1$ Kg, $m_2 = 1.5$ Kg, $L_1 = 1.5$ m, $L_2 = 2$ m, $I_1 = 0.25$ Kg m², $I_2 = 0.15$ Kg m².

2.- (1.5 puntos). Sea el robot de la figura adjunta. Calcular los parámetros dinámicos del **eslabón 2** que se tendrían que introducir en el algoritmo de Newton-Euler utilizado en clase para poder obtener un modelo dinámico del robot. Para ello, considérese que los eslabones están contruidos con varillas macizas de sección circular radio $R = 0.05$ m y de densidad lineal $\rho = 1.5$ kg/m. Formulario: $I = \frac{1}{12} M L^2$, $I = \frac{1}{2} M R^2$."

Problema 1: Modelo Dinámico Matricial y Control Articular (2.0 Puntos)

Apartado 1.a) Modelo Matricial Generalizado

La ecuación dinámica multivariable de manipuladores responde a la estructura estándar:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

siendo $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$, $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2]^T$, y $\boldsymbol{\tau} = [T_1, T_2]^T$.

MATRICES DINÁMICAS DEDUCIDAS:

- **Matriz de Inercia Generalizada $M(q)$:**

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 q_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Propiedades: Es diagonal, simétrica y estrictamente definida positiva ($M(q) > 0$).

- **Vector de Fuerzas de Coriolis y Centrífugas $c(q, \dot{q})$:**

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -m_2 q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

Factorizando matricialmente mediante símbolos de Christoffel:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} m_2 q_2 \dot{q}_2 & m_2 q_2 \dot{q}_1 \\ -m_2 q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Vector de Fuerzas Gravitatorias $g(q)$:**

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 L_1 + m_2 q_2)g \cos q_1 \\ m_2 g \sin q_1 \end{bmatrix}$$

VERIFICACIÓN OBLIGATORIA: ANTISIMETRÍA DE $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$\dot{\mathbf{M}}(q) = \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2\mathbf{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_2 & 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \\ -2m_2 q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -2m_2 q_2 \dot{q}_1 \\ 2m_2 q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{N}^T = -\mathbf{N}$$

Cumple con absoluta exactitud la propiedad de antisimetría requerida para la estabilidad de Lyapunov.

Apartado 1.b) Modelos Aproximados Lineales de Cada Articulación

En control descentralizado monoarticular, se desprecia el acoplamiento cruzado y las aceleraciones no lineales de Coriolis/centrífugas, tratándolas junto con la gravedad como perturbaciones externas lentas. Cada eje se aproxima por un sistema lineal desacoplado de segundo orden:

- **Articulación 1 (Rotacional):** Inercia efectiva dependiente de la posición de la articulación prismática:

$$J_1(q_2) = m_1 L_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 q_2^2$$

Para dimensionar un control robusto en todo el espacio de trabajo, se selecciona la **inercia máxima** en la máxima extensión $q_{2,\max} = L_2$:

$$\mathbf{J}_{1,\max} = \mathbf{m}_1 \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{m}_2 \mathbf{L}_2^2$$

Modelo aproximado lineal: $\mathbf{J}_{1,\max} \ddot{\mathbf{q}}_1(\mathbf{t}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{t}) - \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_0) \implies G_1(s) = \frac{1}{J_{1,\max} s^2}$.

- **Articulación 2 (Prismática):** La inercia es puramente constante (masa del cuerpo móvil):

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{m}_2$$

Modelo aproximado lineal: $\mathbf{m}_2 \ddot{\mathbf{q}}_2(\mathbf{t}) = \mathbf{T}_2(\mathbf{t}) - \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_0) \implies G_2(s) = \frac{1}{m_2 s^2}$.

Apartado 1.c) Diseño del Control PID con Datos Numéricos

Datos dados: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 1.5 \text{ kg}$, $L_1 = 1.5 \text{ m}$, $L_2 = 2.0 \text{ m}$, $I_1 = 0.25 \text{ kg m}^2$, $I_2 = 0.15 \text{ kg m}^2$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

1. Cálculo de las Inercias de Diseño:

$$J_{1,\max} = 1.0 \cdot (1.5)^2 + 0.25 + 0.15 + 1.5 \cdot (2.0)^2 = 2.25 + 0.40 + 6.00 = \mathbf{8.65 \text{ kg m}^2}$$

$$J_2 = m_2 = \mathbf{1.50 \text{ kg}}$$

Estructura del controlador PID en paralelo para cada articulación i :

$$T_i(s) = \left(K_{p,i} + K_{d,i}s + \frac{K_{i,i}}{s} \right) E_i(s) + g_i(q_d)$$

La ecuación característica en lazo cerrado deseada para amortiguamiento crítico ($\xi = 1$, respuesta óptima sin sobreimpulso):

$$s^2 + \frac{K_{d,i}}{J_i} s + \frac{K_{p,i}}{J_i} = s^2 + 2\xi\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2$$

Fijando frecuencias naturales de ancho de banda adecuadas ($\omega_{n1} = 3 \text{ rad/s}$ y $\omega_{n2} = 4 \text{ rad/s}$):

Articulación	Inercia J_i	Frecuencia ω_{ni}	$K_p = J_i \omega_n^2$	$K_d = 2J_i \omega_n$	$K_i = K_p(\omega_n/5)$
Articulación 1 (q_1)	8.65 kg m ²	3.0 rad/s	77.85 N m/rad	51.90 N m s/rad	46.71 N m/(rad s)
Articulación 2 (q_2)	1.50 kg	4.0 rad/s	24.00 N/m	12.00 N s/m	19.20 N/(m s)

Justificación del término K_i : La acción integral anula rigurosamente el error permanente ante el peso y par gravitatorio ($e_{ss} \rightarrow 0$).

Problema 2: Parámetros Dinámicos Newton-Euler del Eslabón 2 (1.5 Puntos)

GEOMETRÍA Y PARÁMETROS DINÁMICOS DEL ESLABÓN 2 (Examen Julio 2025 P3)

Descomposición en 3 Varillas Macizas, Centros de Masa y Vector Local s_{22}

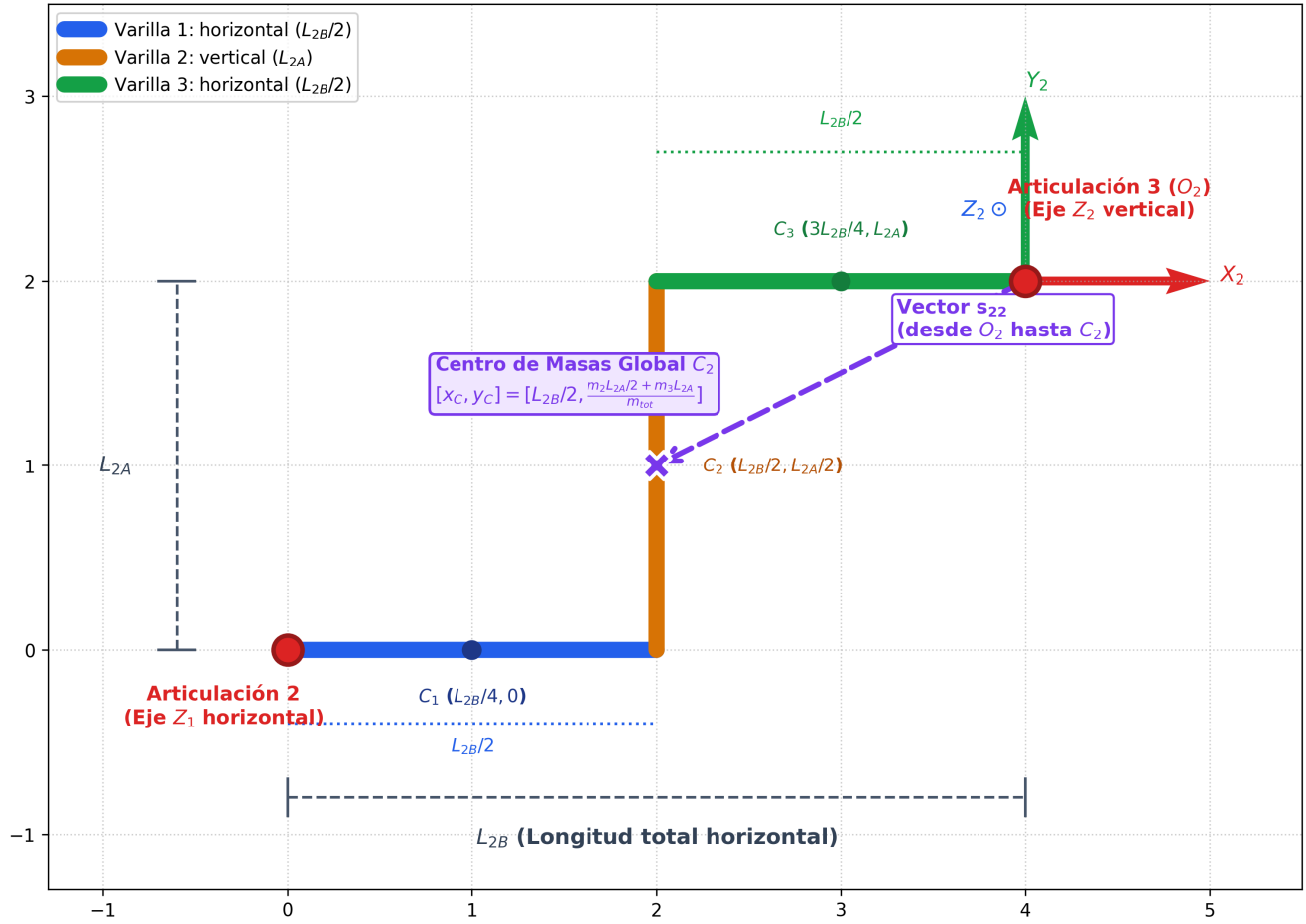


Figura 1: Geometría en manivela escalonada del Eslabón 2, sistema de referencia $\{S_2\}$ en la articulación 3, y vector de centro de gravedad local s_{22} .

1. Descomposición Geométrica y Masa Total (m_2)

El eslabón 2 está formado por 3 varillas macizas cilíndricas de radio $R = 0.05 \text{ m}$ y densidad lineal $\rho = 1.5 \text{ kg/m}$:

- **Varilla 1 (horizontal inferior):** Longitud $L_1 = \frac{L_{2B}}{2} \implies m_1 = \rho \frac{L_{2B}}{2}$.
- **Varilla 2 (vertical intermedia):** Longitud $L_2 = L_{2A} \implies m_2 = \rho L_{2A}$.
- **Varilla 3 (horizontal superior):** Longitud $L_3 = \frac{L_{2B}}{2} \implies m_3 = \rho \frac{L_{2B}}{2}$.

MASA TOTAL DEL ESLABÓN 2 (m_2):

$$m_2 = m_1 + m_2 + m_3 = \rho \left(\frac{L_{2B}}{2} + L_{2A} + \frac{L_{2B}}{2} \right) = \rho(L_{2A} + L_{2B})$$

2. Centro de Masas Local: Vector s_{22} en el Marco $\{S_2\}$

En el algoritmo de Newton-Euler utilizado en clase (plantilla `NE_R3GDL.m`), el vector s_{22} son las coordenadas del centro de gravedad del eslabón 2 expresadas en el **sistema de referencia propio** $\{S_2\}$, cuyo origen O_2 se sitúa en la articulación 3 (al final de la varilla 3, en coordenadas (L_{2B}, L_{2A}) respecto a la articulación 2):

1. Centros de gravedad individuales respecto al inicio (Articulación 2):

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{L_{2B}}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{L_{2B}}{2} \\ \frac{L_{2A}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} \frac{3L_{2B}}{4} \\ L_{2A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Centro de masas compuesto respecto a Articulación 2:

$$x_C = \frac{m_1 \frac{L_{2B}}{4} + m_2 \frac{L_{2B}}{2} + m_3 \frac{3L_{2B}}{4}}{m_2} = \frac{\rho \frac{L_{2B}}{2} \left(\frac{L_{2B}}{4} + \frac{3L_{2B}}{4} \right) + \rho L_{2A} \frac{L_{2B}}{2}}{\rho(L_{2A} + L_{2B})} = \frac{L_{2B}}{2}$$
$$y_C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \frac{L_{2A}}{2} + m_3 L_{2A}}{m_2} = \frac{\rho L_{2A} \frac{L_{2A}}{2} + \rho \frac{L_{2B}}{2} L_{2A}}{\rho(L_{2A} + L_{2B})} = \frac{L_{2A}(L_{2A} + L_{2B}/2)}{L_{2A} + L_{2B}}$$

3. Vector s_{22} respecto a O_2 (Articulación 3 en (L_{2B}, L_{2A})):

$$s_{22} = \begin{bmatrix} x_C - L_{2B} \\ y_C - L_{2A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_{2B}}{2} \\ -\frac{L_{2A}L_{2B}}{2(L_{2A}+L_{2B})} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Tensor de Inercia Baricéntrico $\mathbf{I}_{22}$ (Teorema de Steiner)

El tensor $\mathbf{I}_{22}$ se calcula respecto a unos ejes paralelos a $\{S_2\}$ centrados en el centro de masas C_2 . Para cada varilla cilíndrica k , aplicando las fórmulas del formulario ($I_{\text{long}} = \frac{1}{2}mR^2$, $I_{\text{trans}} = \frac{1}{12}mL^2$) y el teorema de Steiner con distancias relativas $\Delta x_k = x_{Ck} - x_C$, $\Delta y_k = y_{Ck} - y_C$:

- **Varillas horizontales 1 y 3 (eje longitudinal en X , longitud $L_{2B}/2$):**

$$I_{xx}^{(1,3)} = \frac{1}{2}m_{1,3}R^2 + m_{1,3}\Delta y_{1,3}^2, \quad I_{yy}^{(1,3)} = \frac{1}{12}m_{1,3}\left(\frac{L_{2B}}{2}\right)^2 + m_{1,3}\Delta x_{1,3}^2$$
$$I_{zz}^{(1,3)} = \frac{1}{12}m_{1,3}\left(\frac{L_{2B}}{2}\right)^2 + m_{1,3}(\Delta x_{1,3}^2 + \Delta y_{1,3}^2)$$

- **Varilla vertical 2 (eje longitudinal en Y , longitud L_{2A}):**

$$I_{xx}^{(2)} = \frac{1}{12}m_2L_{2A}^2 + m_2\Delta y_2^2, \quad I_{yy}^{(2)} = \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2\Delta x_2^2$$
$$I_{zz}^{(2)} = \frac{1}{12}m_2L_{2A}^2 + m_2(\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2)$$

- **Producto de inercia cruzado I_{xy} :**

$$I_{xy} = -\sum_{k=1}^3 m_k \Delta x_k \Delta y_k$$

TENSOR MATRICIAL FINAL $\mathbf{I}_{22}$:

$$\mathbf{I}_{22} = \begin{bmatrix} I_{xx,\text{bar}} & I_{xy,\text{bar}} & 0 \\ I_{xy,\text{bar}} & I_{yy,\text{bar}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz,\text{bar}} \end{bmatrix}$$

Evaluación Numérica Ejemplo ($R = 0.05$ m, $\rho = 1.5$ kg/m, $L_{2A} = 0.4$ m, $L_{2B} = 0.8$ m):

$$m_2 = 1.5 \cdot (0.4 + 0.8) = \mathbf{1.8000 \text{ kg}}$$
$$\mathbf{s}_{22} = \begin{bmatrix} -0.4000 \\ -0.1333 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad \mathbf{I}_{22} = \begin{bmatrix} 0.0573 & -0.0400 & 0 \\ -0.0400 & 0.0491 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1042 \end{bmatrix} \text{ kg m}^2$$

Ejecución y Verificación Oficial en MATLAB

El script oficial `Matlab/Robots_Examen/examen_julio_2025_p3.m` valida de forma automática tanto el Problema 1 como el Problema 2:

```
>> examen_julio_2025_p3

=====
RESOLUCION OFICIAL: EXAMEN GITI JULIO 2025 - PROBLEMA 3 (DINAMICA/CONTROL)
=====

a) Modelo Matricial:
Matriz de Inercia M(q):
[I1 + I2 + L1^2*m1 + m2*q2^2,  0]
[                                0, m2]

Matriz de Coriolis C(q,qd):
[ m2*q2*qd2,  m2*q2*qd1]
[-m2*q2*qd1,    0]

Verificacion antisimetria dot(M) - 2C: True

c) Parametros sintonizados para Controlador PID Articulacion 1:
Kp1 = 77.8500 N*m/rad | Kd1 = 51.9000 N*m*s/rad | Ki1 = 46.7100 N*m/(rad*s)
Parametros sintonizados para Controlador PID Articulacion 2:
Kp2 = 24.0000 N/m      | Kd2 = 12.0000 N*s/m      | Ki2 = 19.2000 N/(m*s)

--- PROBLEMA 2: PARAMETROS DINAMICOS NEWTON-EULER ESLABON 2 ---
1. Masa total: m2 = rho * (L2A + L2B) = 1.8000 kg
2. Vector s22 en {S2}: [-0.4000; -0.1333; 0.0000] m
3. Tensor I22 baricentrico evaluado:
[ 0.0573, -0.0400,  0.0000 ]
[-0.0400,  0.0491,  0.0000 ]
[ 0.0000,  0.0000,  0.1042 ] kg*m^2
```

CHECKLIST CLAVE DE EXAMEN PARA MAXIMIZAR NOTA:

1. **Antisimetría de Christoffel:** Presenta siempre la comprobación $N + N^T = 0$ de la matriz $\dot{M} - 2C$.
2. **Inercia de diseño $J_{1,\max}$ en PID:** Justifica que se toma $q_{2,\max} = L_2$ para garantizar que el sistema nunca sea inestable ni subamortiguado.
3. **Vector s_{22} medido desde O_2 :** Destaca que s_{22} se mide hacia atrás desde la articulación 3, de ahí sus signos negativos en X e Y .