

1. ASIGNACIÓN DE EJES DENAVIT-HARTENBERG Y POSICIÓN HOME

Criterio de Asignación de Ejes

- **Articulación 1 (Rotación q_1):** Eje de giro vertical perpendicular al plano $\Rightarrow \mathbf{Z}_0 \odot$. Origen O_0 en la base. Eje X_0 horizontal (X_B).
- **Articulación 2 (Prismática q_2):** *Regla de Oro D-H:* El eje de movimiento de una articulación prismática $i = 2$ es $\mathbf{Z}_{i-1}$. Por tanto, $\mathbf{Z}_1$ va **a lo largo de la barra deslizante** en el plano. Como el eslabón L_1 entra a 90° en el casquillo, L_1 es exactamente la **normal común** entre Z_0 y Z_1 ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{L}_1$). El origen O_1 se sitúa en el centro del casquillo. Eje X_1 a lo largo de L_1 . Torsión $\alpha_1 = +90^\circ$.
- **Articulación 3 (Rotación q_3 en muñeca):** Eje de giro perpendicular al plano $\Rightarrow \mathbf{Z}_2 \odot$. Como Z_1 (en el plano) y Z_2 (perpendicular) se cortan en la muñeca $\Rightarrow \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$. El avance a lo largo de Z_1 desde el casquillo hasta la muñeca es la variable prismática $\mathbf{d}_2 = \mathbf{q}_2$. Origen O_2 en la muñeca. Torsión $\alpha_2 = -90^\circ$.
- **Efector Final / Herramienta $\{S_3\}$:** Origen O_3 en el extremo del efector final. Eje $Z_3 \parallel Z_2$. Eje X_3 a lo largo del eslabón de longitud $\mathbf{a}_3 = \mathbf{L}_3$ con $\alpha_3 = 0^\circ$.

Tabla de Parámetros D-H

Eslabón i	θ_i (alrededor de Z_{i-1})	d_i (a lo largo de Z_{i-1})	a_i (a lo largo de X_i)	α_i (alrededor de X_i)	Tipo Articular
1	q_1 (Variable)	0	L_1	$+90^\circ (\pi/2)$	Rotación (Base)
2	0°	q_2 (Variable)	0	$-90^\circ (-\pi/2)$	Prismática (Corredera)
3	q_3 (Variable)	0	L_3	0°	Rotación (Muñeca)

Matrices Homogéneas Elementales y Matriz Resultante

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & L_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & L_1 \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & L_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & L_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_3) & -\sin(q_1 + q_3) & 0 & \mathbf{L}_1 \cos \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \sin \mathbf{q}_1 + \mathbf{L}_3 \cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \\ \sin(q_1 + q_3) & \cos(q_1 + q_3) & 0 & \mathbf{L}_1 \sin \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \cos \mathbf{q}_1 + \mathbf{L}_3 \sin(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN DE LA POSICIÓN HOME ($q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$):

Sustituyendo $q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$ en la matriz T_0^3 :

$$T_{\text{HOME}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_3 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_{\text{HOME}} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_3, \quad \mathbf{y}_{\text{HOME}} = \mathbf{0}, \quad \phi_{\text{HOME}} = 0^\circ$$

Configuración física: El eslabón 1 reposa horizontal a lo largo del eje X_B , la corredera se sitúa en $q_2 = 0$ (muñeca justo en el casquillo), y el eslabón 3 se extiende colinealmente en horizontal, alcanzando la posición cartesiana $(L_1 + L_3, 0)$.

2. PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO (PCD)

Extrayendo las componentes de posición del extremo y la orientación angular en el plano a partir de T_0^3 :

ECUACIONES DEL PCD PARA UN PUNTO GENÉRICO (x, y, ϕ) :

$$x(q_1, q_2, q_3) = L_1 \cos(q_1) + q_2 \sin(q_1) + L_3 \cos(q_1 + q_3)$$

$$y(q_1, q_2, q_3) = L_1 \sin(q_1) - q_2 \cos(q_1) + L_3 \sin(q_1 + q_3)$$

$$\phi(q_1, q_2, q_3) = q_1 + q_3$$

3. MATRIZ JACOBIANA Y DETERMINACIÓN DE SINGULARIDADES

Derivando el vector de estado operacional $p = [x, y, \phi]^T$ respecto a las variables articulares $q = [q_1, q_2, q_3]^T$:

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin q_1 + q_2 \cos q_1 - L_3 \sin(q_1 + q_3) & \sin q_1 & -L_3 \sin(q_1 + q_3) \\ L_1 \cos q_1 + q_2 \sin q_1 + L_3 \cos(q_1 + q_3) & -\cos q_1 & L_3 \cos(q_1 + q_3) \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo del Determinante del Jacobiano

Restando la columna 3 a la columna 1 para anular el último elemento de la tercera fila:

$$\det(J) = \det \begin{bmatrix} -L_1 \sin q_1 + q_2 \cos q_1 & \sin q_1 & -L_3 \sin(q_1 + q_3) \\ L_1 \cos q_1 + q_2 \sin q_1 & -\cos q_1 & L_3 \cos(q_1 + q_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = 1 \cdot [(-L_1 \sin q_1 + q_2 \cos q_1)(-\cos q_1) - (L_1 \cos q_1 + q_2 \sin q_1)(\sin q_1)] = -q_2(\cos^2 q_1 + \sin^2 q_1) = -q_2$$

CONDICIÓN DE SINGULARIDAD:

$$\det(J) = 0 \iff q_2 = 0$$

Interpretación Física de la Singularidad:

- Cuando la variable prismática se anula ($q_2 = 0$), la articulación de la muñeca O_2 coincide exactamente con el casquillo perpendicular al eslabón 1.
- En esa posición, el vector velocidad producido por el giro de la base $\dot{q}_1$ es perpendicular a L_1 , que es exactamente **la misma dirección a lo largo de la cual traslada la corredera** ($\dot{q}_2$).
- Por tanto, ambas articulaciones producen movimiento instantáneo colineal en la misma dirección, perdiéndose la independencia de rangos y quedando el manipulador bloqueado para generar velocidad pura a lo largo del eslabón L_1 .

4. PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO (PCI)

Dada la pose objetivo (x, y, ϕ) , se calculan de forma analítica exacta las variables articulares (q_1, q_2, q_3) :

Paso 1: Desacoplo de la Muñeca (Posición x_w, y_w)

Como $\phi = q_1 + q_3$ es un dato conocido, podemos restar la herramienta L_3 de la posición deseada:

$$x_w = x - L_3 \cos \phi = L_1 \cos q_1 + q_2 \sin q_1$$

$$y_w = y - L_3 \sin \phi = L_1 \sin q_1 - q_2 \cos q_1$$

Paso 2: Despeje de la Articulación Prismática q_2

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro las ecuaciones de la muñeca:

$$x_w^2 + y_w^2 = (L_1 \cos q_1 + q_2 \sin q_1)^2 + (L_1 \sin q_1 - q_2 \cos q_1)^2 = L_1^2 + q_2^2$$

$$q_2 = \pm \sqrt{x_w^2 + y_w^2 - L_1^2}$$

Condición de alcance: $x_w^2 + y_w^2 \geq L_1^2$ (el punto de la muñeca debe estar a una distancia mayor o igual que la longitud L_1).

Paso 3: Despeje de la Articulación de la Base q_1

Reescribiendo matricialmente el sistema desacoplado:

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & q_2 \\ -q_2 & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \end{bmatrix}$$

Invertiendo la matriz de coeficientes ortogonal escalada (determinante $L_1^2 + q_2^2$):

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1^2 + q_2^2} \begin{bmatrix} L_1 & -q_2 \\ q_2 & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1^2 + q_2^2} \begin{bmatrix} L_1 x_w - q_2 y_w \\ q_2 x_w + L_1 y_w \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \text{atan2}(q_2 x_w + L_1 y_w, L_1 x_w - q_2 y_w)$$

Paso 4: Despeje de la Articulación de la Muñeca q_3

$$q_3 = \phi - q_1$$

Total de soluciones: Existen **2 soluciones cinemáticas completas** para cada pose admisible, correspondientes a los dos signos ($\pm$) del valor de la extensión q_2 .