

ROBÓTICA — TERCERA CONVOCATORIA (DICIEMBRE 2019)

Resolución Oficial: Cuestiones Teóricas y Algorítmicas (P1, P4, P5, P6)

Grado en Ingeniería de Tecnologías
Industriales
Universidad de Sevilla | 11 de Diciembre
de 2019

CALIFICACIÓN TOTAL CUESTIONES: 5.0
PUNTOS

PREGUNTA 1: EL RESOLVER (1.0 PUNTO)

Enunciado: Describir qué es un resolver. Para qué sirve, ecuaciones asociadas, etc.

Definición y función: El resolver es un transductor electromecánico de posición angular absoluta continua. Opera como un transformador rotativo inductivo de tensión variable acoplado al eje del motor para medir el ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ecuaciones constitutivas: Excitando el devanado primario del rotor con una portadora senoidal de alta frecuencia $V_R(t) = V_0 \sin(\omega t)$, los dos bobinados estáticos desfasados 90° espaciales inducen:

$$V_{S1}(t) = KV_0 \sin(\omega t) \sin(\theta), \quad V_{S2}(t) = KV_0 \sin(\omega t) \cos(\theta)$$

La demodulación en el conversor RDC (Resolver-to-Digital Converter) obtiene:

$$\tan(\theta) = \frac{V_{S1}(t)}{V_{S2}(t)} \implies \theta = \arctan\left(\frac{V_{S1}}{V_{S2}}\right)$$

Inmune a fluctuaciones de amplitud, temperatura y ruido industrial severo.

PREGUNTA 4: PROPAGACIÓN DE VELOCIDADES LINEALES EN NEWTON-EULER (1.5 PUNTOS)

Enunciado: En relación al algoritmo computacional de Newton-Euler y/o Euler-Lagrange, deducir las fórmulas de la propagación de las velocidades lineales de los orígenes de coordenadas de los eslabones.

4.1. Marco Cinemático y Vector de Posición

Consideremos dos eslabones consecutivos $i-1$ e i cuyos sistemas de coordenadas según Denavit-Hartenberg tienen orígenes O_{i-1} y O_i . El vector que une ambos orígenes es $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}$. La velocidad lineal del origen O_i respecto a la base fija viene dada por la derivada temporal:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\mathbf{p}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_i^*) = \mathbf{v}_{i-1} + \left(\frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt}\right)_{\text{inercial}}$$

4.2. Teorema de Derivación en Sistemas Móviles (Transporte)

Dado que el sistema de referencia $\{i-1\}$ gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt}\right)_{\text{inercial}} = \left(\frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt}\right)_{\text{relativa}} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^*$$

Caso A: Articulación i de Rotación ($\sigma_i = 0$)

La distancia relativa entre orígenes es constante (eslabón rígido, $\dot{\mathbf{p}}_i^* = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^*$$

Proyectando en los ejes del propio sistema $\{i\}$:

Caso B: Articulación i Prismática ($\sigma_i = 1$)

Existe velocidad relativa lineal de deslizamiento a lo largo del eje articular $\mathbf{z}_{i-1}$:

$$\mathbf{v}_i^{(i)} = \mathbf{R}_i^{i-1,T}(\mathbf{v}_{i-1}^{(i-1)} + \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \times \mathbf{p}_i^{*(i-1)})$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt}\right)_{\text{rel}} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

Proyectando en los ejes del sistema $\{i\}$:

$$\mathbf{v}_i^{(i)} = \mathbf{R}_i^{i-1,T}(\mathbf{v}_{i-1}^{(i-1)} + \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \times \mathbf{p}_i^{*(i-1)} + \dot{d}_i \mathbf{z}_0)$$

PREGUNTA 5: SPLINES DE TERCER ORDEN EN CONTROL CINEMÁTICO (1.0 PUNTO)

Enunciado: Indicar cómo calcular los splines de tercer orden que hacen de interpoladores en el control cinemático de un robot manipulador.

5.1. Definición del Polinomio Cúbico

Se desea generar una trayectoria suave para una coordenada articular $q(t)$ en el intervalo $t \in [0, t_f]$ utilizando un polinomio de grado 3:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \implies \dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

5.2. Condiciones de Contorno y Cálculo de Coeficientes

Se imponen las 4 condiciones de contorno: posición y velocidad inicial ($q(0) = q_0, \dot{q}(0) = v_0$) y posición y velocidad final ($q(t_f) = q_f, \dot{q}(t_f) = v_f$):

$$\begin{aligned} q(0) &= a_0 = q_0 \\ \dot{q}(0) &= a_1 = v_0 \\ q(t_f) &= q_0 + v_0 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = q_f \\ \dot{q}(t_f) &= v_0 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 = v_f \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema algebraico lineal 2×2 resultante para a_2 y a_3 :

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0, & a_1 &= v_0 \\ a_2 &= \frac{3(q_f - q_0) - (2v_0 + v_f)t_f}{t_f^2} \\ a_3 &= \frac{-2(q_f - q_0) + (v_0 + v_f)t_f}{t_f^3} \end{aligned}$$

Caso particular de arranque y parada en reposo ($v_0 = 0, v_f = 0$): $a_2 = \frac{3(q_f - q_0)}{t_f^2}, \quad a_3 = -\frac{2(q_f - q_0)}{t_f^3}$.

PREGUNTA 6: ACCIONAMIENTO INDIRECTO Y CONTROLADOR PD (1.5 PUNTOS)

Enunciado: Sea un robot manipulador de accionamiento indirecto:

- Indicar la forma matricial de su ecuación dinámica, comentando qué son cada uno de los términos.
- Indicar los pasos a seguir para diseñar un controlador monoarticular tipo PD para dicho robot.

6.1. Ecuación Dinámica Matricial con Accionamiento Indirecto

Considerando la relación de transmisión $q_m = Rq \iff q = R^{-1}q_m$ con $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ e inercia propia de rotores J_m y rozamiento B_m , la dinámica referida al eje del motor es:

$$(J_m + R^{-1}M(q)R^{-1})\ddot{q}_m + (B_m + R^{-1}BR^{-1})\dot{q}_m + R^{-1}C(q, \dot{q})R^{-1}\dot{q}_m + R^{-1}G(q) = \tau_m$$

- J_m : Matriz diagonal con los momentos de inercia de los rotores de los motores.
- $R^{-1}M(q)R^{-1}$: Matriz de inercia del robot reflejada en los motores (dividida por $r_i r_j$).

- B_m, B : Matrices de amortiguamiento viscoso propio de motores y articulaciones.
- $R^{-1}C(q, \dot{q})R^{-1}\dot{q}_m$: Fuerzas no lineales de Coriolis y centrífugas reflejadas (divididas por $r_i^2 r_j$).
- $R^{-1}G(q)$: Vector de gravedad reflejado al motor (dividido por r_i).
- τ_m : Vector de pares aplicados por los motores actuadores.

6.2. Pasos para Diseñar un Controlador Monoarticular PD

1. **Aproximación lineal desacoplada:** Al ser $r_i \gg 1$, se desprecia el acoplamiento cruzado ($M_{ij}/(r_i r_j) \approx 0$) y fuerzas no lineales, obteniendo para cada articulación i la función de transferencia:

$$G_i(s) = \frac{Q_{mi}(s)}{\tau_{mi}(s)} = \frac{1}{J_{eq,i}s^2 + B_{eq,i}s}, \quad \text{con } J_{eq,i} = J_{mi} + \frac{M_{ii,\max}}{r_i^2}$$

2. **Estructura del controlador PD:** Se define la ley de control por realimentación del error de posición ($e_i = q_{r,i} - q_i$) y velocidad:

$$\tau_{mi}(t) = K_{pi}(q_{r,i} - q_i) + K_{di}(\dot{q}_{r,i} - \dot{q}_i) + \tau_{\text{grav_comp},i}$$

3. **Ecuación característica en lazo cerrado:**

$$s^2 + \frac{B_{eq,i} + K_{di}}{J_{eq,i}}s + \frac{K_{pi}}{J_{eq,i}} = 0$$

4. **Asignación de polos según especificaciones:** Igualando con el polinomio característico de segundo orden deseado $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$:

$$K_{pi} = J_{eq,i}\omega_n^2, \quad K_{di} = 2\xi\omega_n J_{eq,i} - B_{eq,i}$$

5. **Compensación de gravedad / Prealimentación:** Para eliminar el error en régimen permanente ante gravedad sin saturar el lazo derivativo, se añade el término *feedforward* $\tau_{\text{grav_comp},i} = \frac{G_i(q)}{r_i}$ evaluado en la referencia.