

RESOLUCIÓN OFICIAL: PROBLEMA 3 (1.5 PUNTOS)

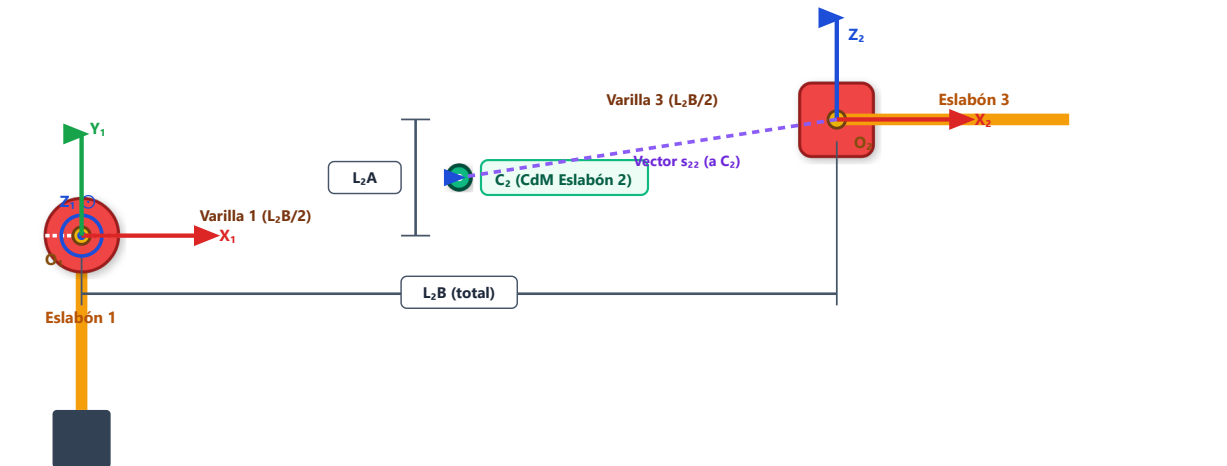
Examen 3ª Convocatoria (11 Diciembre 2019) — Dinámica de Newton-Euler

Grado en Ing. Tecnologías Industriales
Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla
Asignatura: Robótica

ENUNCIADO ORIGINAL:

"Sea el robot de la figura adjunta. Calcular los parámetros dinámicos del eslabón 2 que se tendrían que introducir en el algoritmo de Newton-Euler utilizado en clase para poder obtener un modelo dinámico del robot. Para ello, considérese que los eslabones están contruidos con varillas macizas de sección circular radio $R = 0.05$ m y de densidad lineal $\rho = 1.5$ kg/m."

Fórmulas aportadas en el examen: $I = \frac{1}{12}ML^2$ (eje perpendicular al centro de varilla), $I = \frac{1}{2}MR^2$ (eje longitudinal de cilindro macizo).



RESOLUCIÓN RIGUROSA DE LOS PARÁMETROS DINÁMICOS

Para incorporar el Eslabón 2 en el algoritmo recursivo de Newton-Euler utilizado en clase (ver plantilla oficial NE_R3GDL.m), se requieren exactamente **tres parámetros dinámicos**:

1. Masa Total del Eslabón 2 (m_2)

El eslabón se compone de 3 varillas macizas de radio $R = 0.05$ m y densidad lineal $\rho = 1.5$ kg/m:

- Varilla 1 (inferior horizontal): longitud $l_1 = \frac{L_{2B}}{2} \Rightarrow m_1 = \rho \frac{L_{2B}}{2}$.
- Varilla 2 (intermedia vertical): longitud $l_2 = L_{2A} \Rightarrow m_2 = \rho L_{2A}$.
- Varilla 3 (superior horizontal): longitud $l_3 = \frac{L_{2B}}{2} \Rightarrow m_3 = \rho \frac{L_{2B}}{2}$.

$$m_2 = m_1 + m_2 + m_3 = \rho \left(\frac{L_{2B}}{2} + L_{2A} + \frac{L_{2B}}{2} \right) = \rho(L_{2B} + L_{2A}) = 1.5(L_{2B} + L_{2A}) \text{ kg}$$

2. Posición del Centro de Masas (s_{22} o $r_{2,c2}$)

Calculamos el centro de gravedad C_2 respecto al origen de la Articulación 2 (O_1), tomando el eje longitudinal X y el vertical Y ($z_c = 0$ por simetría plana):

$$x_c = \frac{m_1 \left(\frac{L_{2B}}{4} \right) + m_2 \left(\frac{L_{2B}}{2} \right) + m_3 \left(\frac{3L_{2B}}{4} \right)}{m_2} = \frac{\rho \frac{L_{2B}^2}{2} + \rho \frac{L_{2A}L_{2B}}{2}}{\rho(L_{2B} + L_{2A})} = \frac{\mathbf{L}_{2B}}{\mathbf{2}}$$

$$y_c = \frac{m_1(0) + m_2 \left(\frac{L_{2A}}{2} \right) + m_3(L_{2A})}{m_2} = \frac{\rho \frac{L_{2A}^2}{2} + \rho \frac{L_{2A}L_{2B}}{2}}{\rho(L_{2B} + L_{2A})} = \frac{\mathbf{L}_{2A}}{\mathbf{2}}$$

Vector s_{22} en el sistema local $\{S_2\}$ (con origen O_2 en Articulación 3 según D-H):

Como O_2 se sitúa a distancia L_{2B} en horizontal y L_{2A} en vertical respecto a O_1 :

$$\mathbf{s}_{22} = \begin{bmatrix} x_c - L_{2B} \\ y_c - L_{2A} \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_{2B}}{2} \\ -\frac{L_{2A}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left(\text{o respecto a } O_1 : \mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{L_{2B}}{2} \\ \frac{L_{2A}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

3. Tensor de Inercia respecto al Centro de Masas (I_{22} o I_{c2})

Aplicamos el **Teorema de Steiner (ejes paralelos)** sumando las 3 varillas respecto al centro de masas global C_2 :

$$I_{xx} = \sum_{k=1}^3 (I_{xx,c_k} + m_k(y_k^2 + z_k^2)), \quad I_{yy} = \sum_{k=1}^3 (I_{yy,c_k} + m_k(x_k^2 + z_k^2)), \quad I_{zz} = \sum_{k=1}^3 (I_{zz,c_k} + m_k(x_k^2 + y_k^2))$$

donde las inercias baricéntricas de cada varilla son:

- Varillas horizontales 1 y 3 (longitud $l = L_{2B}/2$ a lo largo de X): $I_{xx,c} = \frac{1}{2}m_1R^2$, $I_{yy,c} = I_{zz,c} = \frac{1}{12}m_1(L_{2B}/2)^2$.
- Varilla vertical 2 (longitud $l = L_{2A}$ a lo largo de Y): $I_{yy,c} = \frac{1}{2}m_2R^2$, $I_{xx,c} = I_{zz,c} = \frac{1}{12}m_2L_{2A}^2$.

Desarrollando los términos de Steiner:

$$I_{xx} = 2 \left[\frac{1}{2}m_1R^2 + m_1 \left(\frac{L_{2A}}{2} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{12}m_2L_{2A}^2 + 0 \right] = \frac{\rho}{12} (L_{2A}^3 + 3L_{2A}^2L_{2B} + 6L_{2B}R^2)$$

$$I_{yy} = 2 \left[\frac{1}{12}m_1 \left(\frac{L_{2B}}{2} \right)^2 + m_1 \left(\frac{L_{2B}}{4} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{2}m_2R^2 \right] = \frac{\rho}{12} (L_{2B}^3 + 6L_{2A}R^2)$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} - \rho R^2 \left(\frac{L_{2A} + L_{2B}}{2} \right) \approx \frac{\rho}{12} (L_{2A}^3 + 3L_{2A}^2L_{2B} + L_{2B}^3)$$

$$I_{xy} = 2 \cdot \left(m_1 \cdot \frac{L_{2B}}{4} \cdot \frac{L_{2A}}{2} \right) = \frac{\rho}{8} L_{2A}L_{2B}^2$$

MATRIZ DE INERCIA FINAL I_{22} :

$$\mathbf{I}_{22} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{12}(L_{2A}^3 + 3L_{2A}^2L_{2B} + 6L_{2B}R^2) & -\frac{\rho}{8}L_{2A}L_{2B}^2 & 0 \\ -\frac{\rho}{8}L_{2A}L_{2B}^2 & \frac{\rho}{12}(L_{2B}^3 + 6L_{2A}R^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{12}(L_{2A}^3 + 3L_{2A}^2L_{2B} + L_{2B}^3) \end{bmatrix}$$

4. Implementación Directa en MATLAB (Plantilla Newton-Euler)

Variable en Script NE_R3GDL.m	Expresión Simbólica / Numérica	Unidades
m2	rho * (L2A + L2B)	kg
s22	[-L2B/2; -L2A/2; 0]	m
I22	[Ixx, -Ixy, 0; -Ixy, Iyy, 0; 0, 0, Izz]	kg · m ²