

ENUNCIADO ORIGINAL DE EXAMEN:

"Se dispone de un brazo robótico en cuyo extremo está situada una cámara (ver figura). El brazo robótico tiene 4 articulaciones: 3 articulaciones de giro (θ_1, θ_2 y θ_3) y una articulación prismática (d_4). Los ejes E_1 y E_2 son verticales, y el eje E_3 está en el plano horizontal, perpendicular a L_2 . El brazo sobre el que está situada la cámara tiene un tramo fijo de longitud L_3 y un tramo de longitud variable (articulación prismática d_4).

Se pide:

- Obtener las posiciones del extremo en función de las variables articulares. Las posiciones del extremo se expresarán en un sistema de referencia fijo.
- Calcular el modelo inverso, suponiendo que la articulación prismática toma un valor fijo $d_4 = 0$. Obtener todas las posibles soluciones y dibujarlas esquemáticamente.
- Obtener todos los puntos singulares del manipulador, indicando gráficamente a qué posiciones del robot corresponde cada uno."

1. ASIGNACIÓN RIGUROSA DE EJES DENAVIT-HARTENBERG (D-H)

Aplicamos las reglas de la convención Denavit-Hartenberg estándar cumpliendo estrictamente con el convenio de la asignatura en la Universidad de Sevilla:

Paso 1: Asignación de los Ejes Z (Ejes de Articulación)

- Eje Z_0 :** Articulación 1 (giro θ_1). Alineado con el eje físico vertical E_1 . Sentido positivo: **vertical hacia arriba**.
- Eje Z_1 :** Articulación 2 (giro θ_2). Alineado con el eje físico vertical E_2 . Sentido positivo: **vertical hacia arriba** (paralelo a Z_0).
- Eje Z_2 :** Articulación 3 (giro θ_3). Alineado con el eje físico E_3 . Está en el plano horizontal y es perpendicular a L_2 . Sentido positivo: hacia la derecha según el vector director de avance de L_2 .
- Eje Z_3 :** Articulación 4 (prismática d_4). *Regla de Oro:* El eje de movimiento de una articulación prismática $i = 4$ es $^{**}Z_{i-1} = Z_3^{**}$. Por tanto, Z_3 va a **lo largo del brazo telescópico de la cámara**, en la dirección de extensión.
- Eje Z_4 :** Extremo/Cámara. Paralelo a Z_3 en el punto focal de la cámara.

Paso 2: Asignación de los Ejes X_i y Orígenes O_i según los 3 Casos Topológicos

- Sistema Base $\{S_0\}$:** Situamos O_0 en la intersección de E_1 con el plano horizontal que contiene el eslabón L_1 . X_0 hacia adelante en la dirección del eslabón 1 cuando $\theta_1 = 0$. $Y_0 = Z_0 \times X_0$.
- Sistema 1 $\{S_1\}$ (Relación entre Z_0 y Z_1 - CASO 2: PARALELOS):** Como $Z_0 \parallel Z_1$ (ambos verticales), la normal común es la recta que une E_1 y E_2 (el eslabón 1). Su longitud es $a_1 = L_1$. Elegimos la normal que pasa por O_0 , lo que fuerza $d_1 = 0$. El origen O_1 se sitúa en E_2 . X_1 apunta a lo largo de L_1 hacia O_1 . Torsión $\alpha_1 = 0^\circ$.
- Sistema 2 $\{S_2\}$ (Relación entre Z_1 y Z_2 - CASO 3: ALABEADOS / PERPENDICULARES):** Z_1 es vertical y Z_2 es horizontal. El eslabón 2 (longitud L_2) es perpendicular a Z_1 y perpendicular a Z_2 (E_3), constituyendo la **única normal común**. Situamos el origen O_2 en la intersección de L_2 con el eje E_3 . Desplazamiento axial $d_2 = 0$ (en el mismo plano horizontal). Longitud $a_2 = L_2$. Eje X_2 a lo largo de L_2 . Torsión: rotando alrededor de X_2 desde Z_1 (arriba) hacia Z_2 (derecha) da $\alpha_2 = +90^\circ$.
- Sistema 3 $\{S_3\}$ (Relación entre Z_2 y Z_3 - CASO 1: SECANTES):** El eje de giro E_3 (Z_2) y el brazo telescópico (Z_3) se cortan en el centro de la articulación 3. Por cortarse: Longitud de la normal común $a_3 = 0$. Origen en la intersección: $O_3 \equiv O_2 \implies d_3 = 0$. El eje X_3 es perpendicular al plano formado por Z_2 y Z_3 : $X_3 = \pm(Z_2 \times Z_3)$. Ángulo entre Z_2 y Z_3 alrededor de X_3 : $\alpha_3 = +90^\circ$.
- Sistema 4 $\{S_4\}$ (Extremo en la Cámara):** Situado en el punto extremo de la cámara. Como el tramo fijo mide L_3 y el extensible d_4 , el desplazamiento a lo largo de Z_3 es $d_4^* = L_3 + d_4$. $X_4 \parallel X_3 \implies \alpha_4 = 0^\circ, a_4 = 0, \theta_4 = 0^\circ$.

ASIGNACIÓN DE EJES DENAVIT-HARTENBERG (D-H) — ROBOT EXAMEN DIC 2019

Ejes de movimiento (Z en Azul), Normales comunes (X en Rojo) y Orígenes (O en Amarillo)

Ejes Z (Movimiento articular) Ejes X (Normales comunes D-H) Orígenes O_i (Sistemas S_i) Eslabones físicos (L_1, L_2, L_3, d_4)

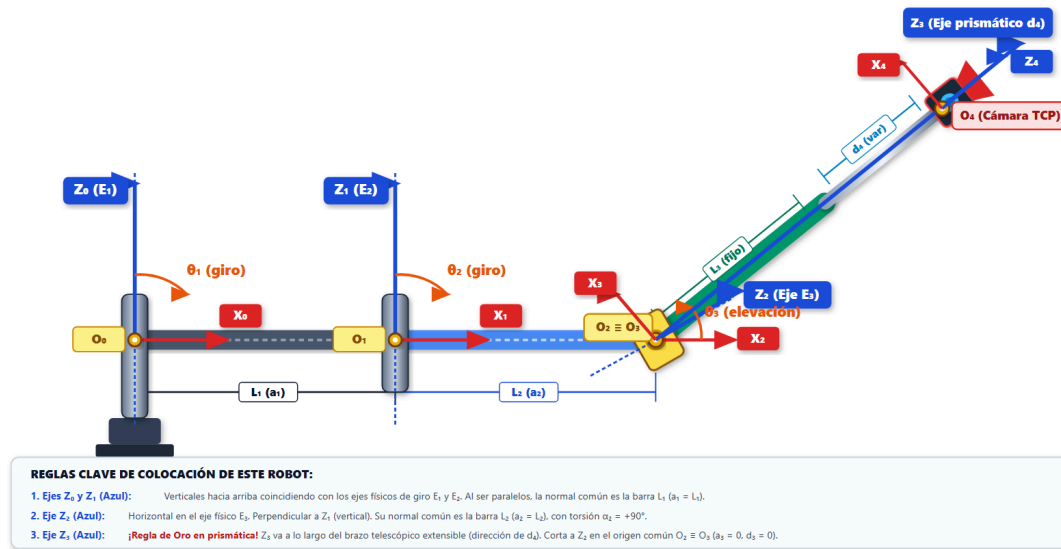


Figura 1: Esquema cinemático tridimensional en alta definición con todos los ejes Denavit-Hartenberg (Z en azul, X en rojo, Orígenes en amarillo).

Tabla Definitiva de Parámetros Denavit-Hartenberg (D-H Estándar)

Eslabón i	θ_i (Giro en Z_{i-1})	d_i (Avance en Z_{i-1})	a_i (Longitud en X_i)	α_i (Torsión en X_i)	Tipo Articular
1	θ_1 (Variable)	0	L_1	0°	Rotación (Eje vertical E_1)
2	θ_2 (Variable)	0	L_2	$+90^\circ$ ($\pi/2$)	Rotación (Eje vertical E_2)
3	$\theta_3 + 90^\circ$ (Variable)	0	0	$+90^\circ$ ($\pi/2$)	Rotación (Eje horizontal E_3)
4	0°	$L_3 + d_4$ (Variable)	0	0°	Prismática (Extensión longitudinal)

Nota sobre θ_3 :** Se añade el desfase $+90^\circ$ en la tabla D-H estándar para que la variable $\theta_3 = 0^\circ$ corresponda físicamente al brazo en reposo horizontal en la dirección de L_2 , y $\theta_3 > 0$ a la elevación angular hacia arriba.

2. APARTADO A: POSICIONES DEL EXTREMO (CINEMÁTICA DIRECTA)

Matrices Homogéneas Elementales A_i

Aplicando la fórmula oficial del examen $A_i = \text{Rot}(Z, \theta_i) \text{Tras}(Z, d_i) \text{Tras}(X, a_i) \text{Rot}(X, \alpha_i)$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & L_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & L_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & L_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & L_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 & 0 \\ \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación Total de la Base al Extremo ($T_0^4 = A_1 A_2 A_3 A_4$)

Multiplicando sucesivamente las matrices homogéneas se obtiene la matriz de transformación de la cámara respecto a la base fija $\{S_0\}$:

$$T_0^4 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_3 & \mathbf{x}(\mathbf{q}) \\ r_{21} & r_{22} & \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_3 & \mathbf{y}(\mathbf{q}) \\ r_{31} & r_{32} & \sin \theta_3 & \mathbf{z}(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ECUACIONES FINALES DE CINEMÁTICA DIRECTA:

$$\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \mathbf{d}_4) = L_1 \cos \theta_1 + [L_2 + (L_3 + \mathbf{d}_4) \cos \theta_3] \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\mathbf{y}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \mathbf{d}_4) = L_1 \sin \theta_1 + [L_2 + (L_3 + \mathbf{d}_4) \cos \theta_3] \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\mathbf{z}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \mathbf{d}_4) = (L_3 + \mathbf{d}_4) \sin \theta_3$$

Comprobación física intuitiva:

- La coordenada vertical z depende exclusivamente de la elevación θ_3 y de la longitud total del brazo $(L_3 + d_4)$.
- En el plano horizontal XY , la proyección radial del brazo telescópico es $(L_3 + d_4) \cos \theta_3$. Sumada a L_2 , forma un segundo radio planar efectivo $R_2 = L_2 + (L_3 + d_4) \cos \theta_3$ orientado según el ángulo $(\theta_1 + \theta_2)$, sumándose vectorialmente al primer eslabón L_1 orientado según θ_1 .

3. APARTADO B: MODELO CINEMÁTICO INVERSO CON $d_4 = 0$ (4 SOLUCIONES)

Fijando $d_4 = 0$, la longitud del tercer brazo es constante e igual a L_3 . Disponemos de un manipulador de 3 GDL con variables $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ para alcanzar una posición objetivo (x, y, z) .

Paso 1: Despeje de la Articulación de Elevación θ_3

$$z = L_3 \sin \theta_3 \implies \sin \theta_3 = \frac{z}{L_3}$$

- **Condición de existencia física:** $|z| \leq L_3$. Si $|z| > L_3$, el punto está fuera del espacio de trabajo.
- Al ser una función seno, existen **dos ramas angulares posibles para θ_3** :

$$\theta_3^{(1)} = \text{atan2} \left(\frac{z}{L_3}, +\sqrt{1 - \left(\frac{z}{L_3} \right)^2} \right) \implies \cos \theta_3 > 0 \quad (\text{Brazo inclinado hacia adelante})$$

$$\theta_3^{(2)} = \text{atan2} \left(\frac{z}{L_3}, -\sqrt{1 - \left(\frac{z}{L_3} \right)^2} \right) = \pi - \theta_3^{(1)} \implies \cos \theta_3 < 0 \quad (\text{Brazo inclinado hacia atrás})$$

Paso 2: Reducción al Problema Planar 2R y Despeje de θ_2

Para cada una de las ramas de θ_3 , calculamos el radio planar equivalente del segundo tramo:

$$R_2 = L_2 + L_3 \cos \theta_3$$

Las coordenadas en el plano horizontal XY quedan gobernadas por el sistema planar clásico 2R:

$$x = L_1 \cos \theta_1 + R_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad y = L_1 \sin \theta_1 + R_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Elevando al cuadrado y sumando ($x^2 + y^2 = L_1^2 + R_2^2 + 2L_1R_2 \cos \theta_2$):

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - R_2^2}{2L_1R_2}$$

- **Condición de alcance planar:** $|\cos \theta_2| \leq 1 \iff |L_1 - |R_2|| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L_1 + |R_2|$.
- Para cada valor admisible de R_2 , surgen **dos soluciones para θ_2** :

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \implies \theta_2 = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}, \cos \theta_2 \right)$$

donde el signo (+) corresponde a configuración **codo izquierda** y el signo (−) a **codo derecha**.

Paso 3: Despeje de la Articulación de la Base θ_1

Desarrollando los términos trigonométricos por adición de ángulos:

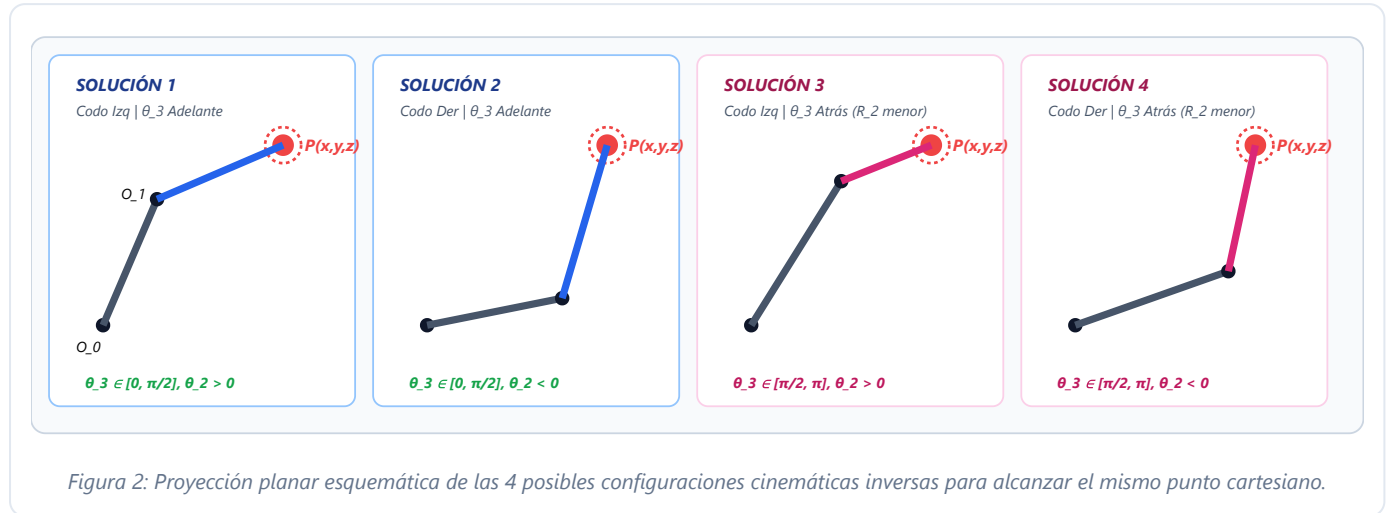
$$x = (L_1 + R_2 \cos \theta_2) \cos \theta_1 - (R_2 \sin \theta_2) \sin \theta_1, \quad y = (L_1 + R_2 \cos \theta_2) \sin \theta_1 + (R_2 \sin \theta_2) \cos \theta_1$$

Resolviendo el sistema lineal de 2 ecuaciones para $\cos \theta_1$ y $\sin \theta_1$:

$$\theta_1 = \text{atan2}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \text{atan2}(\mathbf{R}_2 \sin \theta_2, \mathbf{L}_1 + \mathbf{R}_2 \cos \theta_2)$$

Esquema Gráfico de las 4 Soluciones Cinemáticas Inversas

El acoplamiento de las 2 orientaciones del brazo ($\cos \theta_3 > 0$ o $\cos \theta_3 < 0$) con las 2 posturas de codo ($\sin \theta_2 > 0$ o $\sin \theta_2 < 0$) genera un total de **4 soluciones cinemáticas independientes**:



4. APARTADO C: PUNTOS SINGULARES DEL MANIPULADOR

Para determinar los puntos singulares, calculamos la matriz Jacobiana de posición $J_v(q) = \frac{\partial p}{\partial q}$ del manipulador (con $d_4 = 0$, es decir, 3 GDL):

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -R_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_3 \sin \theta_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ x & R_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -L_3 \sin \theta_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

donde $R_2 = L_2 + L_3 \cos \theta_3$. Calculando el determinante de la matriz 3×3 por desarrollo por la tercera fila:

$$\det(J) = L_3 \cos \theta_3 \cdot [-yR_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - (-xR_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))]$$

Sustituyendo $x = L_1 \cos \theta_1 + R_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ e $y = L_1 \sin \theta_1 + R_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$, el corchete se reduce a $L_1 R_2 \sin \theta_2$. Por tanto, el determinante factorizado resulta:

DETERMINANTE ANALÍTICO DEL JACOBIANO:

$$\det(J) = L_1 \cdot L_3 \cdot (L_2 + L_3 \cos \theta_3) \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_3 = 0$$

Las posiciones singulares del robot corresponden a la anulación de cualquiera de los factores trigonométricos o geométricos:

SINGULARIDAD 1: ALINEAMIENTO DEL CODO ($\sin \theta_2 = 0 \implies \theta_2 = 0^\circ$ o 180°)

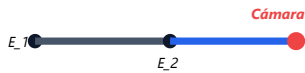
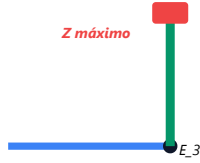
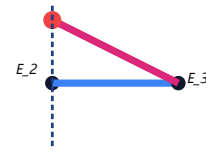
- **Postura $\theta_2 = 0^\circ$ (Frontera exterior):** Los eslabones 1 y 2 están completamente alineados y extendidos en el plano horizontal. El robot alcanza su radio máximo en XY . Se pierde la capacidad de generar velocidad radial hacia el exterior ($\dot{r} > 0$).
- **Postura $\theta_2 = 180^\circ$ (Frontera interior):** El eslabón 2 está completamente plegado hacia atrás sobre el eslabón 1. Se pierde la capacidad de generar velocidad radial hacia el interior.

SINGULARIDAD 2: BRAZO DE LA CÁMARA VERTICAL ($\cos \theta_3 = 0 \implies \theta_3 = \pm 90^\circ$)

- **Interpretación física:** El brazo que sostiene la cámara está apuntando estrictamente vertical hacia arriba ($\theta_3 = +90^\circ$) o vertical hacia abajo ($\theta_3 = -90^\circ$).
- **Pérdida de grado de libertad:** Al derivar, $\frac{\partial z}{\partial \theta_3} = L_3 \cos \theta_3 = 0$. Cualquier movimiento instantáneo de giro $\dot{\theta}_3$ en esta postura no produce cambio en la altura z . Con $d_4 = 0$, el robot se bloquea y es incapaz de generar velocidad en el eje vertical Z ($\dot{z} = 0$).

SINGULARIDAD 3: EXTREMO SOBRE EL EJE VERTICAL E_2 ($R_2 = 0 \implies L_2 + L_3 \cos \theta_3 = 0$)

- **Condición geométrica:** Ocurre si $\cos \theta_3 = -L_2/L_3$ (factible físicamente si $L_3 \geq L_2$).
- **Interpretación física:** La proyección horizontal del brazo apunta hacia atrás y cancela exactamente la longitud L_2 . El extremo del robot se sitúa exactamente sobre el eje de giro vertical E_2 (la segunda articulación).
- **Pérdida de grado de libertad:** La columna 2 del Jacobiano se anula idénticamente ($\frac{\partial p}{\partial \theta_2} = 0$). En este punto, rotar la articulación 2 no desplaza el extremo de la cámara.

SINGULARIDAD 1: Codo Alineado $\theta_2 = 0^\circ$ (Extensión máxima en XY)No hay velocidad radial $v_r > 0$ **SINGULARIDAD 2: Brazo Vertical** $\theta_3 = \pm 90^\circ$ (Cámara en máximo Z)Bloqueo vertical: $dz/dt = 0$ **SINGULARIDAD 3: Sobre Eje E2** $R_2 = L_2 + L_3 \cos(\theta_3) = 0$ 

Eje E2 no produce desplazamiento

Figura 3: Representación gráfica de las tres configuraciones singulares del robot.

5. SCRIPTS DE MATLAB UTILIZADOS PARA SOLUCIONAR CADA PASO

En la suite de Robótica del proyecto, cada fase de la resolución se apoya en scripts modulares de MATLAB diseñados para verificación simbólica y ejecución numérica:

Paso / Apartado	Script de MATLAB	Operación que Realiza
Paso D-H Inicial	Core_Simbolico/dh_matrix.m	Calcula la matriz elemental $A_i(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i)$ con los parámetros de la tabla D-H.
Apartado a) Cinemática Directa	Core_Simbolico/forward_kinematics.m 02_Cinematica/CinematicaDirecta_Examen_Dic2019.m	Calcula simbólicamente $T_0^4 = A_1 A_2 A_3 A_4$ y evalúa numéricamente (x, y, z) a partir de $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, d_4)$.
Apartado b) Cinemática Inversa	02_Cinematica/CinematicaInversa_Examen_Dic2019.m	Calcula las 4 soluciones analíticas para $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ a partir de (x, y, z) con comprobación de rango.
Apartado c) Jacobiano y Singularidades	Core_Simbolico/find_singularities.m	Calcula la matriz Jacobiana $J(q)$, su determinante analítico $\det(J)$ y extrae las raíces simbólicas de singularidad.
Solución Integral Completa	Robots_Examen/examen_diciembre_2019_p2.m	Ejecuta en un único script los 3 apartados del examen, mostrando la comprobación numérica con error $< 10^{-15}$ m.

Ejemplo de Llamada en MATLAB

```
% 1. Ejecución completa del examen con verificación:
run('C:\Tercera_Convocatoria\Robotica\Matlab\Robots_Examen\examen_diciembre_2019_p2.m');

% 2. Evaluación numérica de Cinemática Directa:
xyz = CinematicaDirecta_Examen_Dic2019([pi/6; pi/3; pi/4; 0.1]);

% 3. Cálculo de las 4 soluciones de Cinemática Inversa:
[q_sols, fueraRango] = CinematicaInversa_Examen_Dic2019([0.4; 0.2; 0.15]);
disp('Soluciones articulares q (en grados):');
disp(rad2deg(q_sols));
```