

GUÍA MAESTRA DE CONTROL DE ROBOTS

Metodología Sistemática para Extraer Plantas y Calcular Ganancias (PID, Corrientes, Compensación Gravitatoria y Par Calculado) a partir del Modelo Dinámico · E.S.I. Sevilla (GITI)

1. DEL MODELO DINÁMICO A LA PLANTA DE CADA ARTICULACIÓN

El modelo dinámico completo de un manipulador de n GDL expresado en el espacio articular viene dado por:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

donde:

- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia ($n \times n$), simétrica y definida positiva.
- $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el vector de pares centrífugos y de Coriolis ($n \times 1$).
- $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es el vector de pares gravitatorios ($n \times 1$).
- $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de pares aplicados por los actuadores ($n \times 1$).

1.1. ¿Cómo se desacopla para control monovariable independiente (SISO)?

En la ecuación de la articulación i :

$$M_{ii}(\mathbf{q})\ddot{q}_i + \sum_{j \neq i} M_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + V_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G_i(\mathbf{q}) = \tau_i$$

Se aísla la aceleración propia $\ddot{q}_i$:

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{M_{ii}(\mathbf{q})} [\tau_i - \tau_{\text{dist},i}]$$

donde el término de perturbación acoplada engloba la inercia cruzada, Coriolis y gravedad:

$$\tau_{\text{dist},i} = \sum_{j \neq i} M_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + V_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G_i(\mathbf{q})$$

CRITERIO CLAVE DE EXAMEN (Selección de Inercia de Diseño J_{nom}):

- **Si hay reductoras de gran relación ($N_i \gg 1$):** La inercia vista por el motor es $J_{\text{eff}} = J_{m,i} + \frac{M_{ii}}{N_i^2} \approx J_{m,i}$. Los acoplamientos se atenúan por un factor $1/N_i^2$, por lo que la planta queda naturalmente desacoplada.
- **Si es de accionamiento directo (Direct-Drive, sin reductoras):** La inercia $M_{ii}(\mathbf{q})$ varía fuertemente con la postura del resto de eslabones (típicamente depende de $\cos q_2$). Para garantizar estabilidad robusta en todo

el espacio de trabajo, **se sintoniza con la inercia MÁXIMA posible**:

$$J_{\max} = \max_{\mathbf{q}} M_{ii}(\mathbf{q})$$

(Ejemplo oficial Octubre 2025: $M_{11}(q_2) = m_1 + 2m_2 \cos(q_2) \implies J_{\max} = m_1 + 2m_2$, evaluado cuando $\cos(q_2) = +1$).

2. ESPECIFICACIONES TEMPORALES Y POLINOMIO DESEADO

La planta desacoplada para el eje i tiene la función de transferencia:

$$G_i(s) = \frac{Q_i(s)}{\mathcal{T}_i(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

(O bien $G_i(s) = \frac{1}{s(Js+B)}$ si el enunciado incluye rozamiento viscoso B).

2.1. Traducción de Especificaciones de Enunciado a ω_n y ξ

Especificación dada	Fórmula de conversión	Comentario / Uso
ω_n y ξ directos	Directo (ej: $\omega_n = 3 \text{ rad/s}$, $\xi = 1.0$)	Caso más frecuente en exámenes recientes.
Sobreoscilación M_p	$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$	Para $M_p = 5\% = 0.05 \implies \xi \approx 0.69$. Para $M_p = 0 \implies \xi \geq 1.0$.
Tiempo establecimiento t_s (al 2%)	$\omega_n = \frac{4}{\xi t_s}$	Frecuencia natural del par de polos complejos dominantes.
Tiempo de pico t_p	$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \xi^2}}$	Instante en el que se alcanza el máximo transitorio.

2.2. Construcción del Polinomio Deseado de 3er Orden

Como el PID añade un integrador $\frac{1}{s}$, la ecuación de lazo cerrado es de **tercer orden**. Se ubica el par dominante en $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ y un tercer polo real rápido en $s = -p_o$:

Regla de oro: Se fija $p_o = 4\omega_n$ (o entre $3\omega_n$ y $5\omega_n$) para que el polo real se extinga al menos 4 veces más rápido y la respuesta esté gobernada limpiamente por ω_n y ξ .

Multiplicando ambos factores:

$$P_{\text{des}}(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_o) = s^3 + (2\xi\omega_n + p_o)s^2 + (\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p_o)s + p_o\omega_n^2$$

3. FÓRMULAS ANALÍTICAS EXACTAS DE SINTONIZACIÓN PID

El controlador PID en su forma clásica interactúa con la planta:

$$C_{\text{PID}}(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

La ecuación característica del lazo cerrado es $1 + C_{\text{PID}}(s)G_i(s) = 0$:

$$s^3 + \frac{K_d + B}{J}s^2 + \frac{K_p}{J}s + \frac{K_i}{J} = 0$$

FÓRMULAS MAESTRAS EN UNIDADES DE PAR (N · m):

$$\mathbf{K_d} = \mathbf{J}(2\xi\omega_n + p_o) - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{K_p} = \mathbf{J}(\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p_o)$$

$$\mathbf{K_i} = \mathbf{J}(p_o\omega_n^2)$$

3.1. Caso con Entrada de Control en CORRIENTE (I) o TENSIÓN (V)

Si el motor entrega par proporcional a la intensidad $\tau = K_t I$ (como en el examen de Junio 2018 P2):

FÓRMULAS EN CORRIENTE (Amperios A):

$$K_{d,I} = \frac{K_d}{K_t} = \frac{J(2\xi\omega_n + p_o) - B}{K_t}$$

$$K_{p,I} = \frac{K_p}{K_t} = \frac{J(\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p_o)}{K_t}$$

$$K_{i,I} = \frac{K_i}{K_t} = \frac{J(p_o\omega_n^2)}{K_t}$$

(Si además existe reductora de relación N , sustituir K_t por $N \cdot K_t$).

4. COMPENSACIÓN GRAVITATORIA PREALIMENTADA (FEEDFORWARD)

Si un eje soporta par de gravedad dependiente de la posición ($G_i(q) \neq 0$), exigirle al término integral K_i que levante todo el peso estático causa dos problemas:

1. Error transitorio inicial grande mientras el integrador se carga.
2. Sobreoscilaciones debidas a saturación del integrador (wind-up).

La solución óptima de examen es añadir una **compensación estática en lazo abierto**:

$$\tau_i = \tau_{\text{PID},i} + \hat{G}_i(q)$$

donde $\hat{G}_i(q) = G_i(q)$ cancela de forma inmediata el par de gravedad, dejando que el lazo cerrado PID actúe exclusivamente sobre la inercia $\ddot{q}$.

5. CONTROL MULTIVARIABLE POR PAR CALCULADO (COMPUTED TORQUE CONTROL)

Cuando el robot es de acoplamiento directo y se desea seguimiento riguroso de trayectorias a alta velocidad, se utiliza la ****Linealización por Realimentación Exacta****:

LEY DE CONTROL POR PAR CALCULADO (ESPACIO ARTICULAR):

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q})] + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

Sustituyendo esta ley en la dinámica del manipulador:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V} + \mathbf{G} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e}] + \mathbf{V} + \mathbf{G}$$

Como $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es invertible $\forall \mathbf{q}$:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Para fijar polos con ω_{ni} y ξ_i en cada articulación, las matrices de ganancia son estrictamente **diagonales**:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

6. SCRIPT AUTOMATIZADO EN EL TOOLKIT

Todo este procedimiento está programado en la función de MATLAB: `controlador_desde_modelo_dinamico.m`

```
% EJEMPLO DE USO EN MATLAB (Octubre 2025):
syms q1 q2 real;
M = [1.0 + 3.0*cos(q2), 0.5 + 1.5*cos(q2);
     0.5 + 1.5*cos(q2), 2.5];
G = [0; 2*9.81*sin(q2)];

% Actuadores directos con Kt = 10 N*m/A:
act = struct('Kt', 10.0, 'N', 1.0, 'Bm', 2e-5);

% Especificaciones: wn=3 rad/s, xi=1.0, po=4*wn:
specs = struct('wn', 3.0, 'xi', 1.0, 'po_factor', 4.0);

% Cálculo de ganancias:
resultado = controlador_desde_modelo_dinamico(M, G, act, specs);
```