

Robótica: Libro de Asignatura y Formulario Técnico

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales (GITI) — Escuela Superior de Ingeniería (Sevilla)

MANUAL OFICIAL DE EXAMEN

1. Índice General y Estructura de la Asignatura

La asignatura se articula en tres grandes pilares metodológicos que se evalúan de manera modular en las convocatorias oficiales:

Bloque Temático	Temas y Contenidos Clave	Pregunta Típica de Examen	Peso en Calificación
Bloque I: Morfología y Sensores	Estructuras cinemáticas (Cartesiano, SCARA, Antropomórfico), Grados de libertad, Actuadores eléctricos/hidráulicos, Sensores internos: Sincro-Resolver, Encoders ópticos (absolutos y relativos, código Gray).	Pregunta P1 (Teoría): Funcionamiento físico, ecuaciones del resolver, resolución de encoders ópticos.	1.0 — 2.0 puntos (15 - 20%)
Bloque II: Cinemática y Singularidades	Transformaciones homogéneas, Algoritmo Denavit-Hartenberg (D-H) estándar, Cinemática directa e inversa, Matriz Jacobiana geométrica $J(q)$, Determinación de Singularidades cinemáticas , Desacoplo de muñeca esférica (Método de Pieper).	Problema P2: Asignación de sistemas D-H, tabla de parámetros, Jacobiano, $\det(J) = 0$, cinemática inversa.	3.5 — 4.0 puntos (35 - 40%)
Bloque III: Dinámica y Control	Modelado dinámico mediante Euler-Lagrange : Matriz de inercia $M(q)$, matriz centrífuga y Coriolis $C(q, \dot{q})$ (símbolos de Christoffel), vector de gravedad $g(q)$. Algoritmo recursivo de Newton-Euler. Control PD con compensación de gravedad (Lyapunov) y Control por Par Calculado (Computed Torque Control).	Problema P3: Obtención analítica de matrices dinámicas, cálculo de pares en actuadores, estabilidad y leyes de control.	3.5 — 4.0 puntos (35 - 40%)
Bloque IV: Trayectorias	Interpolación articular mediante polinomios cúbicos y quinticos (C^1, C^2). Perfiles de velocidad trapezoidal con aceleración acotada.	Integrada en P1 o P3 (dimensionado temporal y tramos de cruce).	Complementario

2. Análisis Estadístico de Recurrencia en Exámenes Oficiales (2018 - 2025)

A partir del análisis sistemático de los exámenes oficiales archivados en el corpus documental (Julio 2025, Junio 2025, Octubre, Diciembre 2019, Junio 2018, Septiembre 2018), se extrae el siguiente mapa de frecuencia:

Estructura Fija de Examen en la Escuela de Ingenieros:
El examen consta invariablemente de tres ejercicios independientes:

- Parte 1 (P1, 30 min):** Pregunta de teoría o sensores (Resolver, Encoder, o propagación Newton-Euler).
- Parte 2 (P2, 1h 15 min):** Problema de cinemática (Robot planar 3GDL o SCARA o PUMA con asignación D-H, Jacobiano y Singularidades).
- Parte 3 (P3, 1h):** Problema de dinámica y control (Euler-Lagrange de 2 GDL, par calculado y seguimiento de trayectorias).

Convocatoria Analizada	Problema P1 (Teoría / Sensores)	Problema P2 (Cinemática)	Problema P3 (Dinámica / Control)
Julio 2025 (1.^a Conv.)	Sincro-Resolver: funcionamiento, señales seno/coseno y resolución.	Manipulador planar 3 GDL: D-H, cinemática directa, Jacobiano 3×3 , singularidades ($q_2 = 0, \pi$) e inversa.	Ecuaciones dinámicas no lineales de 2 GDL, diseño de controlador por Par Calculado y cálculo de pares.
Junio 2025	Control cinemático y generación de trayectorias cúbicas con velocidad intermedia.	Robot antropomórfico planar: asignación D-H, matriz Jacobiana y desacoplo de singularidades.	Manipulador vertical bajo gravedad: control PD con compensación $g(q)$ vs Par Calculado.
Octubre (3.^a Conv.)	Sincro-Resolver vs Encoders absolutos y código Gray.	Análisis de configuraciones singulares y pérdida de rango en manipulador serial.	Modelo dinámico por Euler-Lagrange, cálculo de matriz $M(q)$ y vector gravitatorio $g(q)$.
Diciembre 2019	Principio físico del Resolver y algoritmo computacional Newton-Euler.	Manipulador serial 3GDL: parámetros D-H y estudio de singularidades.	Linealización por realimentación y ley de Par Calculado con amortiguamiento crítico.
Junio 2018 / Sept 2018	Encoders ópticos: detección de sentido por cuadratura (90°) y código Gray.	Robot SCARA (RRPR): cinemática directa, Jacobiano 4×4 y singularidades.	Dinámica de eslabones rotacionales, energía cinética/potencial y matrices M y C .

3. Formulario Técnico y Ecuaciones Maestras

3.1 Convención y Matriz de Transformación Denavit-Hartenberg (D-H)

Para pasar del sistema S_{i-1} al sistema S_i mediante los 4 parámetros estándar:

$$A_i = \text{Rot}(Z_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Tras}(Z_{i-1}, d_i) \cdot \text{Tras}(X_i, a_i) \cdot \text{Rot}(X_i, \alpha_i)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- θ_i : Ángulo entre X_{i-1} y X_i alrededor de Z_{i-1} (variable si la articulación i es de Rotación, R).
- d_i : Desplazamiento desde el origen O_{i-1} a la intersección con X_i a lo largo de Z_{i-1} (variable si es Prismática, P).
- a_i : Distancia mínima a lo largo de la normal común X_i .
- α_i : Ángulo de torsión entre Z_{i-1} y Z_i alrededor de X_i .

3.2 Matriz Jacobiana Geométrica $J(q)$

Relaciona las velocidades articulares $\dot{q}$ con la velocidad lineal v_e y angular ω_e del efector final:

$$\begin{bmatrix} v_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = J(q) \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} J_{v1} & J_{v2} & \cdots & J_{vn} \\ J_{\omega 1} & J_{\omega 2} & \cdots & J_{\omega n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

- **Articulación de Rotación (R):** $J_{vi} = z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1})$, $J_{\omega i} = z_{i-1}$
- **Articulación Prismática (P):** $J_{vi} = z_{i-1}$, $J_{\omega i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Donde $z_{i-1} = T_0^{i-1}(1 : 3, 3)$ y $p_{i-1} = T_0^{i-1}(1 : 3, 4)$ (con $z_0 = [0, 0, 1]^T$ y $p_0 = [0, 0, 0]^T$).

3.3 Singularidades Cinemáticas

Las configuraciones singulares corresponden a la pérdida de rango del Jacobiano:

$$\det(J(q)) = 0$$

- **Consecuencias físicas:** En una singularidad se pierde al menos un grado de libertad de movimiento en el espacio operacional, y los pares requeridos para generar velocidades en dicha dirección tenderían a infinito ($\tau = J^T F \implies F = J^{-T} \tau$).
- **Desacople de Pieper (Muñeca Esférica):** Para robots de 6 GDL con los tres últimos ejes cortándose en un punto, la matriz Jacobiana se factoriza en bloques:

$$\det(J) = \det(J_{\text{brazo}}) \cdot \det(J_{\text{muñeca}}) = \det(J_{11}) \cdot \sin(q_5) = 0$$

La singularidad de muñeca ocurre siempre en $\sin(q_5) = 0 \implies q_5 = 0, \pi$ (alineación de los ejes Z_4 y Z_6).

3.4 Modelado Dinámico: Formulación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$$

$$\boxed{M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau}$$

- **Matriz de inercia $M(q)$:** Simétrica y definida positiva ($M(q) = M^T(q) > 0$). $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$.
- **Símbolos de Christoffel para $C(q, \dot{q})$:**

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right) \implies C_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk} \dot{q}_i$$

Esta elección asegura la propiedad de pasividad: la matriz $(\dot{M} - 2C)$ es ****antisimétrica**** ($\dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} = 0$).

- **Vector gravitatorio:** $g_k(q) = \frac{\partial V(q)}{\partial q_k}$.

3.5 Algoritmos de Control Dinámico

- **Control PD con Compensación de Gravedad:**

$$\tau = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + g(q)$$

Estabilidad asintótica garantizada por la función de Lyapunov: $V(x) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p\tilde{q} \implies \dot{V} = -\dot{q}^T K_d\dot{q} \leq 0$.

- **Control por Par Calculado (Computed Torque Control / Par Inverso):**

$$\tau = M(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q), \quad \text{con } u = \ddot{q}_d + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)$$

Linealiza y desacopla exactamente el sistema no lineal, produciendo la dinámica de error de 2.º orden:

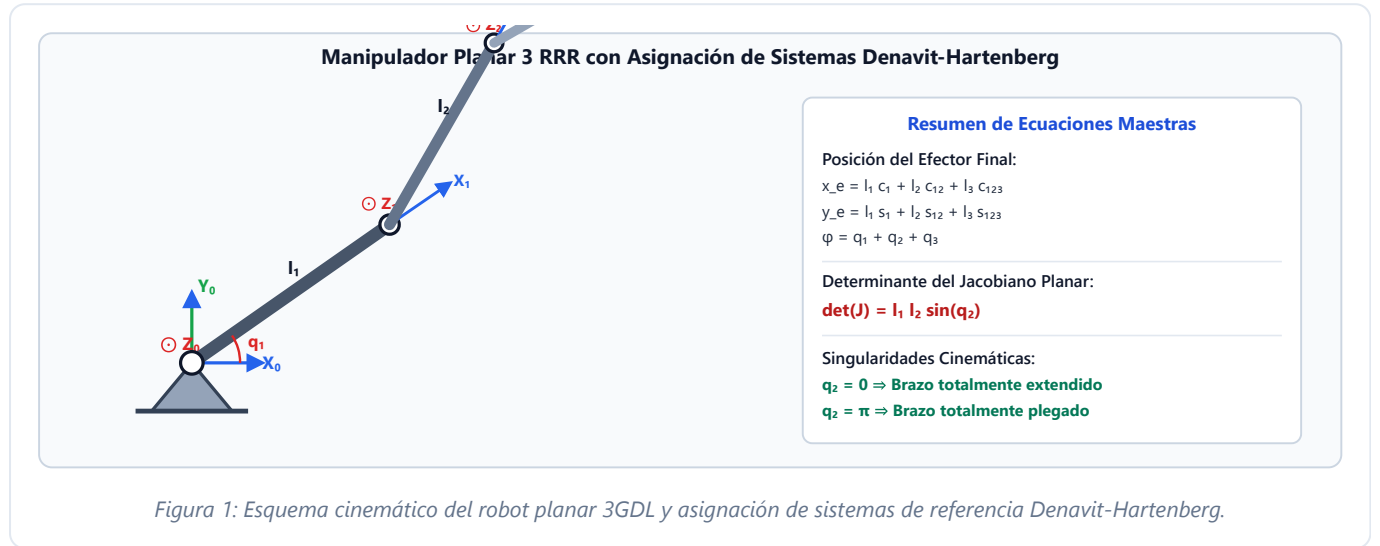
$$\ddot{\tilde{q}} + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q} = 0 \quad (\text{Amortiguamiento crítico con } K_v = 2\sqrt{K_p})$$

4. Problema Maestro 1 (Cinemática y Singularidades): Robot Planar 3 GDL (RRR)

Problema idéntico al P2 de las convocatorias de Julio 2025, Junio 2025 y Octubre.

Enunciado: Dado el manipulador planar de 3 grados de libertad (RRR) con eslabones de longitudes l_1 , l_2 y l_3 :

1. Asignar los sistemas de referencia según la convención Denavit-Hartenberg.
2. Obtener la tabla de parámetros D-H y calcular la cinemática directa (x_e, y_e, ϕ) .
3. Deducir analíticamente la matriz Jacobiana geométrica $J(q)$ referida a la base.
4. Determinar todas las configuraciones singulares del manipulador analizando $\det(J) = 0$.
5. Plantear el algoritmo de cinemática inversa exacta para alcanzar la posición y orientación (x_d, y_d, ϕ_d) .



Resolución Paso a Paso:

1. Tabla Denavit-Hartenberg:

Eslabón i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

2. Matriz Jacobiana Planar:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Restando la columna 3 a la 2, y la columna 2 a la 1:

$$\det(J) = l_1 l_2 (c_1 s_{12} - s_1 c_{12}) = l_1 l_2 \sin(q_{12} - q_1) = l_1 l_2 \sin(q_2)$$

3. Cinemática Inversa Analítica:

- Centro de la muñeca: $x_w = x_d - l_3 \cos \phi_d$, $y_w = y_d - l_3 \sin \phi_d$.
- Articulación 2: $\cos q_2 = \frac{x_w^2 + y_w^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \implies q_2 = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2}, \cos q_2)$ *(Solución codo arriba / codo abajo)*.
- Articulación 1: $q_1 = \text{atan2}(y_w, x_w) - \text{atan2}(l_2 \sin q_2, l_1 + l_2 \cos q_2)$.
- Articulación 3: $q_3 = \phi_d - q_1 - q_2$.

5. Problema Maestro 2 (Dinámica y Control): Robot 2 GDL Bajo Gravedad

Problema idéntico al P3 de las convocatorias de Julio 2025, Junio 2025 y Octubre.

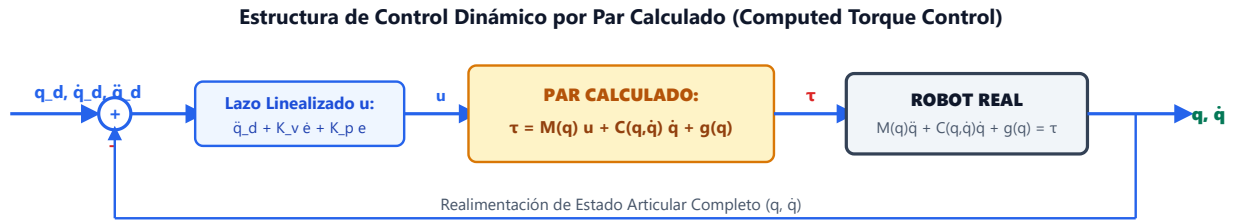


Figura 2: Diagrama de bloques del algoritmo de Par Calculado (linealización por realimentación no lineal).

Deducción de Matrices Dinámicas de 2 GDL:

Para dos eslabones con masas puntuales m_1, m_2 en los extremos (o con centros de masa l_{c1}, l_{c2}):

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 & m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Punto Clave de Examen (Demostración de Estabilidad):

Al aplicar la ley de Par Calculado $\tau = M(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$, sustituyendo en la ecuación del robot:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = M(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \implies M(q)(\ddot{q} - u) = 0$$

Como la matriz de inercia $M(q)$ es siempre definida positiva (invertible):

$$\ddot{q} = u = \ddot{q}_d + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) \implies \ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = 0$$

Las n ecuaciones quedan **lineales y totalmente desacopladas**. Para que el error tienda a cero sin sobreoscilación, se escogen ganancias críticas: $K_v = 2\sqrt{K_p}$.

6. Problema Maestro 3 (Teoría P1): Sincro-Resolver vs Encoders Ópticos

Pregunta evaluada en Julio 2025, Octubre y Diciembre 2019.

Sincro-Resolver (Sensor Inductivo)

- **Principio físico:** Transformador rotativo con un bobinado móvil (rotor) alimentado con tensión senoidal de referencia $V_r(t) = V_0 \sin(\omega t)$, y dos bobinados estatóricos fijos desfasados geométricamente 90° en el espacio.

- **Tensiones inducidas en el estator:**

$$V_{s1}(t) = K \cdot V_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta)$$

$$V_{s2}(t) = K \cdot V_0 \sin(\omega t) \cdot \cos(\theta)$$

- **Extracción del ángulo articular θ :**

$$\frac{V_{s1}}{V_{s2}} = \tan(\theta) \implies \theta = \text{atan2}(V_{s1}, V_{s2})$$

- **Ventajas industriales:** Extraordinaria robustez mecánica, térmicamente insensible hasta $> 150^\circ\text{C}$, inmune a suciedad, polvo, aceite y vibraciones severas. Es absoluto dentro de una vuelta (360°).

Encoders Ópticos (Incremental vs Absoluto)

- **Incremental con cuadratura:**

- Dos canales fotométricos A y B desfasados eléctricamente 90° ($\pi/2$).
- Permite **detección del sentido de giro** (si flanco de A adelanta a B o viceversa) y multiplicación de resolución x4.
- Canal Z (Index): marca un pulso por vuelta para referenciar el origen ("homíng").

- **Absoluto con Código Gray:**

- Disco con múltiples pistas concéntricas.
- **Propiedad del Código Gray:** Entre dos sectores angulares contiguos **solo cambia un único bit**.
- Evita errores catastróficos de lectura (glitches) durante la transición entre sectores adyacentes en comparación con el binario natural.

7. Guía Rápida de la Suite de MATLAB Desarrollada

En el directorio C:\Tercera_Convocatoria\Robotica\Matlab\ se dispone de la suite completa lista para resolver ejercicios:

Script / Función	Ruta	Capacidad y Uso en Examen
dh_matrix.m	Core_Simbolico/	Calcula la matriz A_i simbólica de 4x4 dados (θ, d, a, α) .
forward_kinematics.m	Core_Simbolico/	Multiplica acumulativamente T_0^i para N eslabones y simplifica expresiones.
geometric_jacobian.m	Core_Simbolico/	Deduce el Jacobiano analítico $6 \times N$ (J_v y J_ω) para combinaciones R y P.
find_singularities.m	Core_Simbolico/	Calcula $\det(J)$, lo factoriza y halla las raíces de singularidad cinemática.
euler_lagrange_matrices.m	Core_Simbolico/	Deduce automáticamente $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ por Christoffel, y el vector $g(q)$.
computed_torque_control.m	Core_Simbolico/	Implementa el lazo de Par Calculado con ganancias K_p, K_v .
robot_planar_3gdl_examen.m	Robots_Examen/	Script maestro: Resuelve el Problema P2 completo del Robot Planar 3 RRR.
robot_scara_4gdl_examen.m	Robots_Examen/	Resuelve el Robot SCARA (RRPR) con Jacobiano reducido 4×4 .
robot_puma560_pieper_examen.m	Robots_Examen/	Desacoplo de Pieper (brazo 3GDL + muñeca esférica 3GDL) y singularidades.

Script / Función	Ruta	Capacidad y Uso en Examen
simulacion_control_comparativa.m	Robots_Examen/	Simulación numérica con ode45 comparando PD sin compensación, PD con $g(q)$ y Par Calculado.